EDISI REVISI 2017

Matematika

SMA/MA/
SMK/MAK

KELAS

XI

Disklaimer: Buku ini merupakan buku siswa yang dipersiapkan Pemerintah dalam rangka implementasi Kurikulum 2013. Buku siswa ini disusun dan ditelaah oleh berbagai pihak di bawah koordinasi Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan, dan dipergunakan dalam tahap awal penerapan Kurikulum 2013. Buku ini merupakan "dokumen hidup" yang senantiasa diperbaiki, diperbaharui, dan dimutakhirkan sesuai dengan dinamika kebutuhan dan perubahan zaman. Masukan dari berbagai kalangan yang dialamatkan kepada penulis dan laman http://buku.kemdikbud.go.id atau melalui email buku@kemdikbud.go.id diharapkan dapat meningkatkan kualitas buku ini.

Katalog Dalam Terbitan (KDT)

Indonesia. Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.
Matematika/ Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.-- . Edisi Revisi
Jakarta: Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan, 2017.
viii, 336 hlm. : ilus. ; 25 cm.

Untuk SMA/MA/SMK/MAK Kelas XI
ISBN 978-602-427-114-5 (jilid lengkap)
ISBN 978-602-427-116-9 (jilid 2)

1. Matematika — Studi dan Pengajaran I. Judul
II. Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan

510

Penulis : Sudianto Manullang, Andri Kristianto S., Tri Andri Hutapea, Lasker Pangarapan Sinaga, Bornok Sinaga, Mangaratua Marianus S., Pardomuan N. J. M. Sinambela,
Penelaah : Agung Lukito, Muhammad Darwis M., Turmudi, Nanang Priatna,
Pereview : Sri Mulyaningsih
Penyelia Penerbitan : Pusat Kurikulum dan Perbukuan, Balitbang, Kemendikbud.

Cetakan Ke-1, 2014 ISBN 978-602-282-105-2 (Jilid 2a)
978-602-282-106-9 (Jilid 2b)
Cetakan Ke-2, 2017 (Edisi Revisi)
Disusun dengan huruf Times New Roman, 12 pt.

Kata Pengantar

Anak-anak kami, Generasi Muda harapan bangsa ...

Sesungguhnya, kami gurumu punya cita-cita dan harapan dari hasil belajar kamu. Kami berkeinginan membelajarkan kamu pada setiap ruang dan waktu. Tetapi itu tidak mungkin, karena ruang dan waktu membatasi pertemuan kita. Namun demikian, ruang dan waktu bukan penghambat bagi kita mendalami ilmu pengetahuan. Pakailah buku ini sebagai salah satu sumber belajarmu. Apa yang ada dalam buku ini cukup bermanfaat untuk mempelajari matematika, dan untuk keberhasilan kamu menuju jenjang pendidikan yang lebih tinggi.

Matematika adalah hasil abstraksi (pemikiran) manusia terhadap objek-objek di sekitar kita dan menyelesaikan masalah yang terjadi dalam kehidupan, sehingga dalam mempelajarinya kamu harus memikirkannya kembali, bagaimana pemikiran para penciptanya terdahulu. Belajar matematika sangat berguna bagi kehidupan. Cobalah membaca dan pahami materinya serta terapkan untuk menyelesaikan masalah-masalah kehidupan di lingkunganmu. Kamu punya kemampuan, kami yakin kamu pasti bisa melakukannya.

Buku ini diawali dengan pengajuan masalah yang bersumber dari fakta dan lingkungan budaya siswa terkait dengan materi yang akan diajarkan. Tujuannya agar kamu mampu menemukan konsep dan prinsip matematika melalui pemecahan masalah yang diajukan dan mendalami sifat-sifat yang terkandung di dalamnya yang sangat berguna untuk memecahkan masalah kehidupan. Tentu, penemuan konsep dan prinsip matematika tersebut dilakukan oleh kamu dan teman-teman dalam kelompok belajar dengan bimbingan guru. Coba lakukan tugasmu, mulailah berpikir, bertanya, berdiskusi, berdebat dengan orang/teman yang lebih memahami masalah. Ingat …!!!, tidak ada hasil tanpa usaha dan perbuatan.

Asahlah pemahaman kamu dengan memecahkan masalah dan tugas yang tersedia. Di sana ada masalah autentik/nyata dan teka-teki untuk memampukan kamu berpikir logis, cermat, jujur dan tangguh menghadapi masalah. Terapkan pengetahuan yang telah kamu miliki, cermati apa yang diketahui, apa yang ditanyakan, konsep dan rumus mana yang akan digunakan untuk menyelesaikan. Semuanya sangat berguna bagi kamu.

Selamat belajar, semoga buku ini bermanfaat dan dapat membantu kamu kompeten bermatematika dan memecahkan masalah kehidupan.

Tim Penulis

Daftar Isi

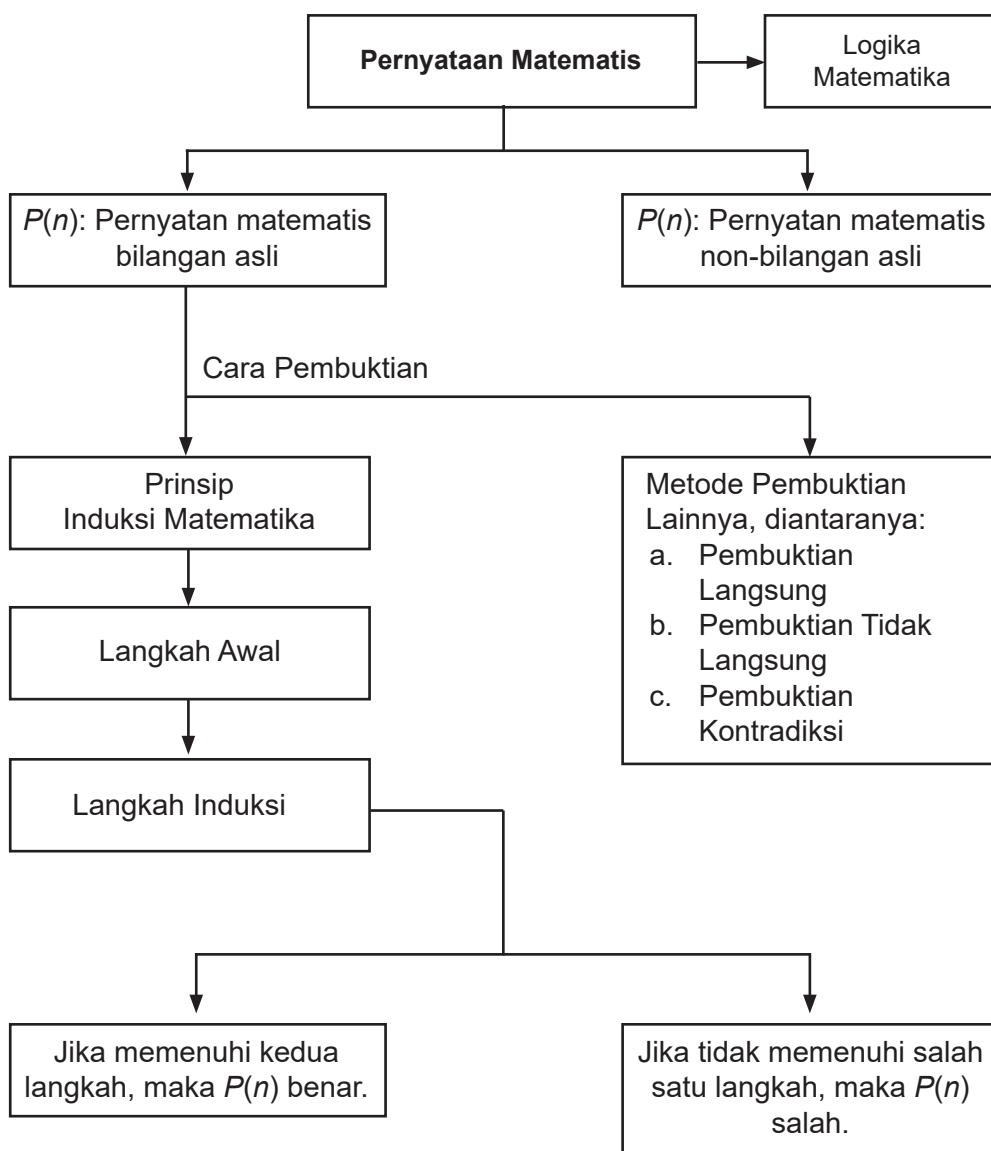
Induksi Matematika

A. Kompetensi Dasar dan Pengalaman Belajar

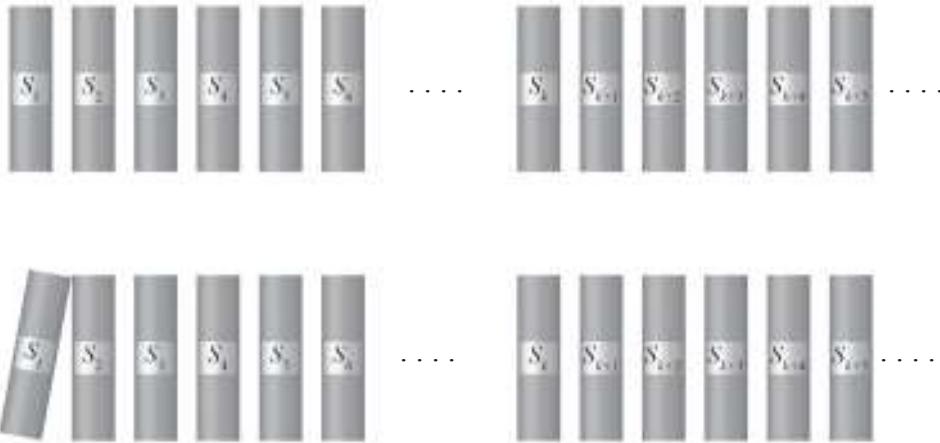
Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
Setelah mengikuti pembelajaran induksi matematika, siswa mampu: 3.1 Menjelaskan metode pembuktian pernyataan matematis berupa barisan, ketidaksamaan, keterbagian dengan induksi matematika. 4.1 Menggunakan metode pembuktian induksi matematika untuk menguji pernyataan matematis berupa barisan, ketidaksamaan, keterbagian.	Melalui pembelajaran materi induksi matematika, siswa memperoleh pengalaman belajar: • Mampu berpikir kreatif. • Mampu berpikir tangguh. • Mampu berpikir kritis dalam mengamati permasalahan. • Mengajak untuk menganalisis kebenaran suatu pernyataan matematika.

Istilah Penting

- Induksi
- Langkah Awal (*Basic Steps*)
- Langkah Induksi (*Induction Step*)

B. Diagram Alir

C. Materi Pembelajaran

1.1 Pengantar Induksi Matematika

Perhatikan ilustrasi berikut ini.

Gambar 1.1. Ilustrasi sebanyak *n* objek (papan) yang disusun dengan jarak dua objek yang berdekatan sama.

- Dari ilustrasi pada Gambar 1.1, papan manakah yang jatuh jika papan S_1 dijatuhkan ke arah S_2?
- Jika terdapat 100 susunan papan mengikuti pola seperti pada ilustrasi di atas, apakah papan ke S_{100} juga akan jatuh?

Dari ilustrasi di atas, dapat dibayangkan bahwa menjatuhkan papan S_1 ke arah S_2 pasti papan yang paling ujung, sebut papan S_n (untuk setiap n bilangan asli), juga jatuh. Dengan kata lain dapat dinyatakan bahwa jika papan S_1 jatuh maka papan S_{15} juga jatuh bahkan papan S_n juga jatuh.

- Bentuklah kelompok belajar! Lalu, pikirkan masalah kontekstual yang polanya mirip dengan ilustrasi Gambar 1.1. Paparkan hasil yang kalian peroleh di hadapan teman-temanmu.

Mari kita cermati masalah-masalah berikut ini.

Masalah 1.1

Tanpa menggunakan alat bantu hitung, rancang formula yang memenuhi pola penjumlahan bilangan mulai 1 hingga 20.
Kemudian, uji kebenaran formula yang ditemukan sedemikian sehingga berlaku untuk penjumlahan bilangan mulai dari 1 hingga n, dengan n bilangan asli.

Alternatif Penyelesaian:

a. Pola yang terdapat pada, yaitu:
   - Selisih dua bilangan yang berurutan selalu sama yaitu 1.
   - Hasil $(1 + 20) = (2 + 19) = (3 + 18) = (4 + 17) = \ldots = (10 + 11) = 21$.

   Artinya terdapat sebanyak 10 pasang bilangan yang jumlahnya sama dengan 21.

   Jadi hasil $1 + 2 + 3 + \ldots + 18 + 19 + 20 = \left(\frac{20}{2}\right).21 = 210$.

b. Untuk mengetahui pola yang terdapat pada $1 + 2 + 3 + \ldots + n$, untuk n bilangan asli, perlu dipilih sebarang $n > 20$. Misalnya kita pilih $n = 200$. Sekarang, kita akan menyelidiki apakah pola yang terdapat pada $1 + 2 + 3 + \ldots + 18 + 19 + 20$ berlaku pada $1 + 2 + 3 + \ldots + 198 + 199 + 200$?
   - Selisih dua bilangan yang berurutan selalu sama yaitu 1.
   - Hasil $(1 + 200) = (2 + 199) = (3 + 198) = (4 + 197) = \ldots = (100 + 101) = 201$.
   - Artinya terdapat sebanyak 100 pasang bilangan yang jumlahnya sama dengan 201.

   Jadi hasil $1 + 2 + 3 + \ldots + 198 + 199 + 200 = \left(\frac{200}{2}\right).201 = 20.100$

Dengan demikian untuk sebarang n bilangan asli yang genap, kamu dapat menentukan jumlah bilangan berurutan mulai dari 1 hingga n.

- Dengan Masalah 1.1, coba kamu pikirkan bagaimana formula yang kamu gunakan untuk menjumlahkan bilangan berurutan mulai 1 hingga n, dengan n sebarang bilangan asli yang ganjil. Bandingkan cara kamu temukan dengan temanmu. Pastikan cara yang kamu peroleh merupakan cara paling singkat.
- Coba kamu temukan formula untuk pola, untuk sebarang n bilangan asli.

Masalah 1.2

Tanpa menggunakan alat bantu hitung, rancang formula yang memenuhi pola $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 10^2$. Kemudian, uji formula tersebut untuk menghitung $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 30^2$.

Alternatif Penyelesaian:

Menjumlahkan $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 10^2$ berarti kita menjumlahkan 10 bilangan kuadrat yang pertama, yaitu $1 + 4 + 9 + 16 + 25 + \ldots + 64 + 81 + 100$. Mari kita cermati tabel berikut ini .

Tabel 1.1. Pola penjumlahan $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 10^2$

n	**Jumlah *n* bilangan kuadrat yang pertama**
1	$1^2 = \frac{1.2.3}{6} = 1$
2	$1^2 + 2^2 = \frac{2.3.5}{6} = 5$
3	$1^2 + 2^2 + 3^2 = \frac{3.4.7}{6} = 14$
4	$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = \frac{4.5.9}{6} = 30$
5	$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = \frac{5.6.11}{6} = 55$
6	$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = \frac{6.7.13}{6} = 91$
. . .	. . .
10	$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \ldots + 9^2 + 10^2 = \frac{(\ldots)\times(\ldots)\times(\ldots)}{6} = \ldots$

Setelah kamu lengkapi Tabel 1.1, temukan pola untuk:

a) Penjumlahan berurut bilangan kuadrat mulai dari 1^2 hingga 30^2. Kemudian hitung hasilnya.

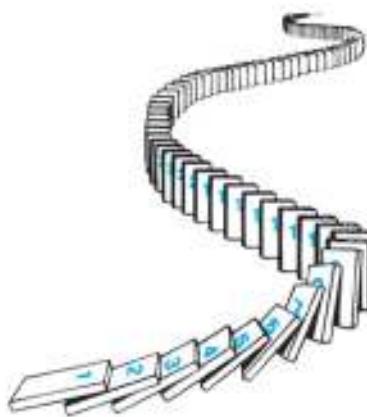
b) Penjumlahan berurut bilangan kuadrat mulai dari 1^2 hingga 50^2. Kemudian hitung hasilnya.

c) Penjumlahan berurut bilangan kuadrat mulai dari 1^2 hingga n^2. Uji kebenaran formula yang kamu peroleh. Bandingkan hasil yang kamu peroleh dengan temanmu!

Pertanyaan Kritis!!!
Perhatikan penjumlahan bilangan berikut ini.
$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + ... + 46^3 + 47^3 + 48^3 + 49^3 + 50^3$
Rancang formula yang berlaku untuk penjumlahan bilangan tersebut.
Kemudian buktikan kebenaran formula yang kamu peroleh.

Dari ilustrasi pada Gambar 1.1, Masalah 1.1, dan Masalah 1.2 menjelaskan atau menemukan suatu konsep/prinsip/sifat yang berlaku umum atas konsep/prinsip/sifat yang berlaku khusus. Pola seperti itu sering disebut prinsip induksi matematika. Jadi, induksi matematika digunakan untuk membuktikan suatu konsep/prinsip/sifat berlaku umum atas konsep/prinsip/sifat yang berlaku khusus.

1.2 Prinsip Induksi Matematika

Induksi matematika merupakan teknik pembuktian yang baku dalam matematika. Melalui induksi Matematika, kita dapat mengurangi langkah pembuktian yang sangat rumit untuk menemukan suatu kebenaran dari pernyataan matematis hanya dengan sejumlah langkah terbatas yang cukup mudah. Prinsip induksi matematika memiliki efek domino (jika domino disusun berjajar dengan jarak tertentu, saat satu ujung domino dijatuhkan ke arah donimo lain, maka semua domino akan jatuh satu per satu). Coba perhatikan Gambar 1.2

Gambar 1.2. Prinsip induksi matematika berlaku dalam pola susunan kartu

Mungkin pada saat masa kecil, kamu pernah bermain seperti pada Gambar 1.2 tanpa disadari ada konsep matematika yang telah kita gunakan pada permainan tersebut. Apakah kamu masih memiliki permainan lain yang menggunakan konsep induksi matematika?

Catatan Historis

Pertama mengetahui penggunaan induksi matematis adalah dalam karya matematis abad ke-16 **Francesco Maurolico** (1494-1575). Maurolico menulis secara ekstensif pada karya-karya matematika klasik dan membuat banyak kontribusi kepada geometri dan optik. Dalam bukunya **Arithmeticorum Libri Duo,** Maurolico menyajikan berbagai sifat-sifat bilangan bulat bersama-sama dengan bukti dari sifat-sifat ini. Untuk bukti beberapa sifat ini ia mengemukakan metode induksi matematis. Penggunaan induksi matematis pertamanya dalam buku ini adalah untuk membuktikan bahwa jumlah dari n bilangan bulat positif ganjil pertama sama dengan n^2.

Ingat, dengan induksi matematika dapat melakukan pembuktian kebenaran suatu pernyataan matematika yang berhubungan dengan bilangan asli, bukan untuk menemukan formula. Prinsip induksi matematika dinyatakan pada Prinsip 1.1.

Prinsip 1.1 Induksi Matematika

Misalkan P(n) merupakan suatu pernyataan bilangan asli. Pernyataan P(n) benar jika memenuhi langkah berikut ini:

a. Langkah Awal (*Basic Step*): P(1) benar.
b. Langkah Induksi (*Induction Step*): Jika P(k) benar, maka P(k + 1) benar, untuk setiap k bilangan asli.

Pada proses pembuktian dengan Prinsip Induksi Matematika, untuk langkah awal tidak selalu dipilih untuk $n = 1$, $n = 2$, atau $n = 3$, tetapi dapat dipilih sebarang nilai n sedemikian sehingga dapat mempermudah supaya proses langkah awal dipenuhi. Selanjutnya, yang ditemukan pada langkah awal merupakan modal untuk langkah induksi. Artinya, jika $P(1)$ benar, maka $P(2)$ benar; jika $P(2)$ benar maka $P(3)$ benar; demikian seterusnya

hingga disimpulkan $P(k)$ benar. Dengan menggunakan P(k) benar, maka akan ditunjukkan $P(k + 1)$ benar. Jika $P(n)$ memenuhi kedua prinsip induksi matematika, maka formula $P(n)$ terbukti benar. Jika salah satu dari kedua prinsip tidak dipenuhi, maka formula $P(n)$ salah.
Mari kita cermati masalah berikut ini.

Masalah 1.3

Misalkan suatu ATM menyediakan layanan penarikan uang tunai untuk pecahan Rp20.000,00 dan Rp50.000,00. Berapakah jumlah kelipatan penarikan dengan jumlah minimal yang dapat diambil pelanggan melalui ATM tersebut adalah Rp40.000,00?

Alternatif Penyelesaian:

Dengan menggunakan induksi matematika, harus kita tunjukkan bahwa Prinsip 1.1 dipenuhi untuk penarikan Rp n yang merupakan kelipatan Rp40.000,00 dengan n merupakan bilangan asli.

a) Langkah awal
Untuk mengeluarkan uang sejumlah Rp40.000,00, ATM bekerja dan mengeluarkan 2 lembar uang Rp20.000,00.
Jadi, untuk $n = 2$, maka benar ATM dapat mengeluarkan sejumlah uang kelipatan Rp40.000,00.

b) Langkah Induksi
Dengan demikian, untuk setiap jumlah uang kelipatan Rp40.000,00, ATM dapat mengeluarkan sejumlah uang yang diperlukan pelanggan. Artinya, untuk mengeluarkan Rp n, dengan n adalah kelipatan Rp40.000,00 dan n bilangan asli dapat digunakan e lembar uang Rp20.000,00. Akibatnya dapat disimpulkan bahwa $P(k)$ benar. Kita akan menunjukkan bahwa $P(k+1)$ juga benar, yaitu untuk mengeluarkan uang sejumlah $(k+1)$ kelipatan uang Rp40.000,00 dapat menggunakan uang pecahan Rp20.000,00 dan/atau Rp50.000,00.

Selain itu, terdapat dua kemungkinan, yaitu:

i) Misalkan ATM kehabisan uang pecahan Rp50.000,00, maka untuk mengeluarkan uang senilai Rp n menggunakan pecahan uang Rp20.000,00. Karena minimal 40.000, setidaknya harus menggunakan dua lembar uang pecahan Rp 20.000,00. Dengan mengganti dua lembar uang Rp 20.000,00 sebagai pengganti satu lembar Rp50.000,00 akan menjadikan uang yang dikeluarkan ATM sebanyak Rp $(n + k)$, dengan k senilai Rp10.000,00.

ii) Misalkan ATM mengeluarkan uang senilai Rp n, dengan sedikitnya satu lembar pecahan Rp50.000,00. Dengan mengganti satu lembar pecahan Rp50.000,00 dengan tiga lembar pecahan uang Rp20.000,00 akan menjadikan uang yang dikeluarkan ATM sebesar Rp $(n + k)$, dengan k senilai Rp10.000,00.

Dengan demikian terbukti bahwa jika $P(k)$ benar, maka $P(k + 1)$ juga benar.

Jadi, untuk Masalah 1.3, terbukti bahwa pola penarikan uang tunai melalui ATM memenuhi prinsip induksi matematika.

Sekarang mari kita cermati contoh-contoh pembuktian dengan induksi matematika berikut ini.

Contoh 1.1

Buktikan dengan induksi matematika bahwa jumlah n bilangan ganjil positif yang pertama sama dengan n^2.

Alternatif Penyelesaian:

Tentu kamu mengetahui pola bilangan ganjil positif, yaitu: $2n – 1$, untuk n bilangan asli.

Sedemikian sehingga akan ditunjukkan bahwa:

$1 + 3 + 5 + 7 + . . . + (2n – 1) = n^2$.

Sebut, $P(n) = 1 + 3 + 5 + 7 + . . . + (2n – 1) = n^2$.

Untuk membuktikan kebenaran formula $P(n)$, kita harus menyelidiki apakah $P(n)$ memenuhi prinsip induksi matematika, yaitu langkah awal dan langkah induksi.

a) Langkah awal:
   Untuk $n = 1$, maka $P(1) = 1 = 1^2 = 1$.
   Jadi $P(1)$ benar.

b) Langkah Induksi:
   Karena $P(1)$ benar, maka $P(2)$ juga benar, hingga dapat diperoleh untuk $n = k$,
   $P(k) = 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2k - 1) = k^2$ juga benar, untuk setiap k bilangan asli.
   Akan ditunjukkan untuk bahwa untuk $n = k + 1$, sedemikian sehingga
   $P(k + 1) = 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2(k + 1) - 1) = (k + 1)^2$ adalah suatu pernyataan yang benar.
   Karena $P(k) = 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2k - 1) = k^2$ adalah pernyataan yang benar, maka
   $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2k - 1) = k^2$
   Jika kedua ruas ditambahkan dengan $(2k + 1)$, akibatnya
   $$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2k - 1) + (2k + 1) = k^2 + 2k + 1$$
   $$= (k + 1)^2.$$
   Jadi, dengan $P(k)$ ditemukan $P(k + 1)$.
   Dengan demikian terbukti bahwa: $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1) = n^2$ adalah benar, untuk setiap n bilangan asli.

Karena formula $P(n) = 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1) = n^2$, memenuhi kedua prinsip induksi matematika, maka jumlah n bilangan ganjil positif yang pertama sama dengan n^2 adalah benar, dengan n bilangan asli.

Contoh 1.2

Gunakan induksi matematika untuk membuktikan bahwa:
$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$
untuk setiap n bilangan bulat positif.

Alternatif Penyelesaian:

Misalkan $P(n) = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.
Kali ini, sudah cukup jelas makna pernyataan yang akan dibuktikan dengan menggunakan induksi matematika. Oleh karena itu, akan ditunjukkan bahwa pernyataan $P(n)$ memenuhi langkah awal dan langkah induksi.

a) Langkah Awal:
   Untuk $n = 0$, diperoleh, $1 = 2^{0+1} - 1$.
   Jadi $P(0)$ benar.

b) Langkah Induksi:
   Pada langkah awal diperoleh $P(0)$ benar, akibatnya $P(1)$ benar, $1 + 2 = 2^{1+1} - 1$.
   Oleh karena itu disimpulkan bahwa, untuk $n = k$,
   $P(k) = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^k = 2^{k+1} - 1$.
   Selanjutnya akan ditunjukkan, jika $P(k)$ benar, maka $P(k + 1)$ juga benar.
   Dari $P(k)$ kita peroleh,
   $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^k = 2^{k+1} - 1$.
   Kemudian kedua ruas ditambahkan 2^{k+1}, akibatnya

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^k + 2^{k+1} &= 2^{k+1} - 1 + 2^{k+1} \\ &= 2.2^{k+1} - 1 \\ &= 2^{(k+1)+1} - 1 \end{aligned}$$

   Diperoleh bahwa $P(k + 1) = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{k+1} = 2^{(k+1)+1} - 1$ adalah benar, untuk setiap k bilangan bulat positif.

Karena $P(n) = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ memenuhi kedua prinsip induksi matematika, maka formula $P(n) = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ adalah benar, dengan n bilangan bulat psotif.

Contoh 1.3

Untuk setiap bilangan asli, dengan $n \geq 1$ berlaku:

$$\frac{1}{1(2)} + \frac{1}{2(3)} + \frac{1}{3(4)} + \frac{1}{4(5)} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{(n+1)}.$$

Buktikan dengan induksi matematika

Alternatif Penyelesaian:

Kita misalkan, $P(n) = \frac{1}{1(2)} + \frac{1}{2(3)} + \frac{1}{3(4)} + \frac{1}{4(5)} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{(n+1)}$.

Akan ditunjukkan bahwa $P(n)$ memenuhi prinsip induksi matematika, yaitu langkah awal dan langkah induksi.

a) Langkah Awal:

Untuk $n = 2$, kita peroleh

$$\frac{1}{1(2)}+\frac{1}{2(3)}=\frac{2}{(2+1)}$$

$$\leftrightarrow \frac{2}{3}=\frac{2}{3}.$$

Dengan demikian, diperoleh bahwa $P(2)$ adalah benar.

b) Langkah Induksi:

Karena $P(2)$ benar, maka $P(3)$ benar, hingga disimpulkan

$P(k) = \frac{1}{1(2)}+\frac{1}{2(3)}+\frac{1}{3(4)}+\frac{1}{4(5)}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{(k+1)}$ adalah benar.

Akan ditunjukkan, jika $P(k)$ benar, maka $P(k + 1)$ benar.

Diperoleh $\frac{1}{1(2)}+\frac{1}{2(3)}+\frac{1}{3(4)}+\frac{1}{4(5)}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{(k+1)}$.

Jika kedua ruas ditambahkan $\frac{1}{(k+1)\cdot[(k+1)+1]}=\frac{1}{(k+1)\cdot(k+2)}$, diperoleh

$$\frac{1}{1(2)}+\frac{1}{2(3)}+\frac{1}{3(4)}+\frac{1}{4(5)}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k}{(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{k+1}{k+2}$$

Jadi diperoleh bahwa $\frac{1}{1(2)}+\frac{1}{2(3)}+\frac{1}{3(4)}+\frac{1}{4(5)}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$

$=\frac{k+1}{k+2}$ adalah benar, untuk setiap k bilangan asli.

Karena formula $P(n) = \frac{1}{1(2)}+\frac{1}{2(3)}+\frac{1}{3(4)}+\frac{1}{4(5)}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{(n+1)}$ memenuhi kedua prinsip induksi matematika, maka formula tersebut adalah formula yang benar.

Uji Kompetensi 1.1

1. Untuk setiap rumusan $P(n)$ yang diberikan, tentukan masing-masing $P(n + 1)$.

   a) $P(n) = \dfrac{5}{n(n+1)}$,   c) $P(n) = \dfrac{n^2(n-1)^2}{4}$,

   b) $P(n) = \dfrac{3}{(n+2)(n+3)}$,   d) $P(n) = \dfrac{n^2}{2(n+1)^2}$.

2. Rancang formula yang memenuhi setiap pola berikut ini.
   a) $2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 2n$,
   b) $2 + 7 + 12 + 17 + 22 + \ldots + (5n - 3)$,
   c) $3 + 7 + 11 + 15 + 19 + \ldots + (4n - 1)$,
   d) $1 + 4 + 7 + 10 + 13 + \ldots + (3n - 2)$,
   e) $\left(1+\frac{1}{1}\right).\left(1+\frac{1}{2}\right).\left(1+\frac{1}{3}\right).\left(1+\frac{1}{4}\right). \ldots .\left(1+\frac{1}{n}\right).$

3. Dari soal nomor 2, ujilah kebenaran formula yang kamu temukan dengan menggunakan prinsip induksi matematika.
   Untuk soal nomor 4 – nomor 10, gunakan prinsip induksi matematika untuk membuktikan kebenaran setiap formula yang diberikan. (n bilangan asli)

4. $(1 \,.\, 1!) + (2 \,.\, 2!) + (3 \,.\, 3!) + \ldots + (n \,.\, n!) = (n + 1)! - 1.$

5. $1 \,.\, 2 + 2 \,.\, 3 + 3 \,.\, 4 + \ldots + n \,.\, (n + 1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}.$

6. $a^m.a^n = a^{m+n}$, untuk setiap m, n bilangan asli.
   [Petunjuk: pilih sembarang m bilangan asli]

7. Untuk a, b bilangan real tak nol,

   $a + a + b + a + 2b + a + 3b + a + 4b + \ldots + a + (n - 1)b = \dfrac{n}{2}[2a + (n - 1)b]$

8. $a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1} = \dfrac{a(r\quad)}{\quad}.$

9. $P(n) = n(n + 1)(n + 5)$ adalah bilangan kelipatan 3.

10. $P(n) = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n - 1)^2 = \dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}.$

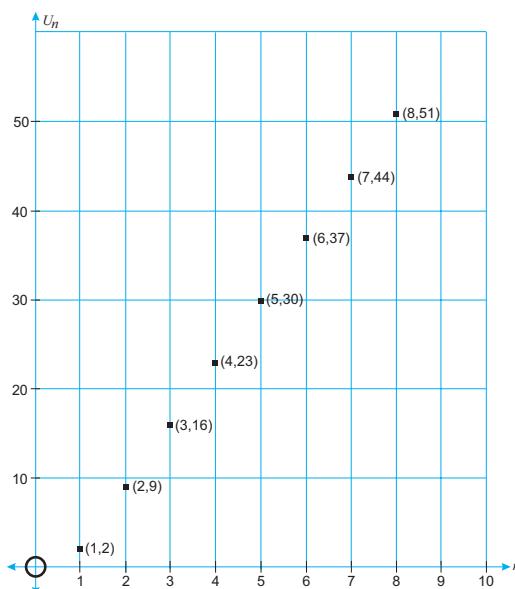
1.3 Bentuk-Bentuk Penerapan Induksi Matematika

1.3.1 Penerapan Induksi Matematika pada Barisan Bilangan

Masalah 1.4

Misalkan u_i menyatakan suku ke i suatu barisan bilangan asli, dengan i = 1, 2, 3, . . . , n.
Diberikan barisan bilangan asli, 2, 9, 16, 23, 30, 37, 44, 51, ...
Rancang suatu formula untuk menghitung suku ke 1.000 barisan bilangan tersebut. Ujilah kebenaran formula yang diperoleh dengan menggunakan induksi matematika.

Alternatif Penyelesaian:

Terlebih dahulu kita mengkaji barisan bilangan asli yang diberikan, bahwa untuk $n = 1$ maka $u_1 = 2$; untuk $n = 2$ maka $u_2 = 9$; untuk $n = 3$ maka $u_3 = 16$; demikian seterusnya. Artinya kita harus merancang suatu formula sedemikian sehingga formula tersebut dapat menentukan semua suku-suku barisan bilangan tersebut. Mari kita telaah hubungan antara n dengan suku-suku barisan bilangan 2, 9, 16, 23, 30, 37, 44, 51, . . . yang dideskripsikan pada Gambar 1.3.

Gambar 1.3. Sebaran titik yang dibentuk oleh n dengan suku-suku barisan 2, 9, 16, 23, 30, 37, 44, 51, …

Dari Gambar 1.3, tampak jelas bahwa sebaran titik-titik (n, u_n) diwakilkan oleh suatu fungsi linear, kita misalkan $u_n = an + b$, dengan n bilangan asli dan a dan b bilangan real tak nol.

Dengan demikian,

- jika $n = 1$ maka $u_1 = a.(1) + b \leftrightarrow a + b = 2$ (1)
- jika $n = 2$ maka $u_3 = a.(3) + b \leftrightarrow 3a + b = 16$ (2)

Dengan pengalaman belajar menyelesaikan persamaan linear dua variabel, dari Persamaan (1) dan (2) diperoleh $a = 7$ dan $b = -5$.

Jadi formula untuk barisan bilangan asli, 2, 9, 16, 23, 30, 37, 44, 51, . . . adalah $u_n = 7n - 5$.

Nah, sebelum kita menentukan nilai u_{1000}, harus diuji kebenaran formula yang diperoleh, tentunya menggunakan induksi matematika.

a) Langkah awal

Untuk $n = 4$, maka $u_4 = 7(4) - 5 = 23$.

Kita simpulkan bahwa $P(4)$, dalam hal ini u_4 adalah benar.

b) Langkah Induksi

Karena $P(4) = u_4$ benar, maka $P(5) = u_5$ benar.

Secara umum disimpulkan bahwa $P(k) = u_k = 7k - 5$ adalah benar.

Dengan menggunakan $P(k) = u_k$, akan ditunjukkan bahwa $P(k + 1) = u_{k+1} = 7(k + 1) - 5$.

Jika $u_k = 7k - 5$, maka dapat dituliskan sebanyak n suku barisan bilangan asli yang mengikuti pola bertambah 7, yaitu: 2, 9, 16, 23, 30, 37, 44, 51, . . . $(7k - 5)$.

Dengan demikian, jika kita menuliskan sebanyak $(k + 1)$ suku barisan bilangan asli yang mengikuti pola bertambah 7, yaitu: 2, 9, 16, 23, 30, 37, 44, 51, . . . $(7k - 5)$, $(7k + 2)$.

Akibatnya, suku ke $(k + 1)$ pola bilangan tersebut adalah $u_{k+1} = 7k + 2 = 7(k + 1) - 5$.

Jadi terbukti bahwa $P(k + 1) = u_{k+1} = 7(k + 1) - 5 = 7k + 2$ adalah benar, dengan k adalah bilangan asli.

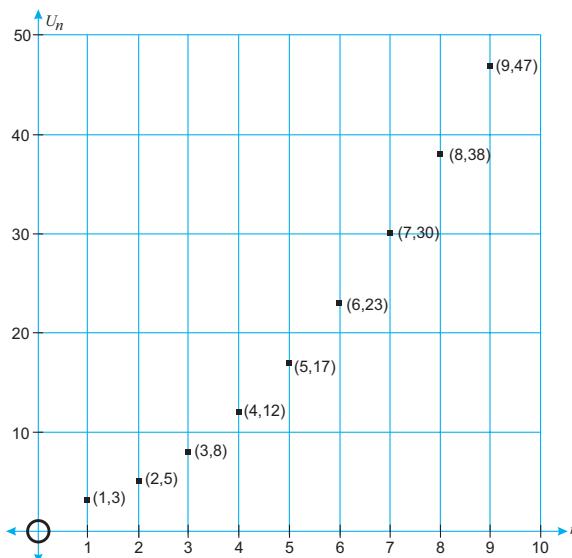
Karena, formula $u_n = 7n - 5$ memenuhi kedua prinsip induksi matematika, maka disimpulkan bahwa adalah formula yang benar untuk barisan bilangan asli 2, 9, 16, 23, 30, 37, 44, 51, ...

Dengan demikian $u_{1.000} = 7(1.000) - 5 = 6.995$.

Dengan pengalaman belajar yang kamu peroleh pada penyelesaian Masalah 1.4, mari kita selesaikan Contoh 1.4.

Contoh 1.4

Diberikan barisan bilangan asli, 3, 5, 8, 12, 17, 23, 30, 38, ...
Selidiki suatu formula yang memenuhi pola barisan tersebut. Sebelum menentukan suku ke 1.999, terlebih dahulu uji kebenaran formula yang kamu peroleh dengan menggunakan induksi matematika.

Alternatif Penyelesaian:
Analog dengan konsep yang diberikan pada Masalah 1.3, berikut ini dijelaskan melalui Gambar 1.4, sebaran titik yang dibentuk oleh n dan suku-suku barisan bilangan asli 3, 5, 8, 12, 17, 23, 30, 38, ...

Gambar 1.4. Sebaran titik yang dibentuk oleh n dengan suku-suku barisan 3, 5, 8, 12, 17, 23, 30, 38,47, …

Dengan mencermati Gambar 1.4 dan pengalaman kamu belajar fungsi kuadrat pada saat kelas X, bahwa sebaran titik-titik (n, u_n) dapat dihampiri dengan suatu fungsi kuadrat. Kita misalkan fungsi kuadratnya, $u_n = an^2 + bn + c$, untuk setiap n bilangan asli dan a, b, dan c bilangan real tak nol.
Melalui fungsi tersebut, diperoleh

- jika $n = 1$ maka $u_1 = a.(1^2) + b.(1) + c \leftrightarrow a + b + c = 3$ (1*)
- jika $n = 2$ maka $u_2 = a.(2^2) + b.(2) + c \leftrightarrow 4a + 2b + c = 5$ (2*)
- jika $n = 3$ maka $u_3 = a.(3^2) + b.(3) + c \leftrightarrow 9a + 3b + c = 8$ (3*)

Dengan pengalaman belajar sistem persamaan linear tiga variabel yang telah kamu tuntaskan di kelas X, dengan mudah kamu menemukan nilai a, b, dan c yang memenuhi persamaan (1*), (2*), dan (3*), yaitu $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$, dan $c = 2$.

Akibatnya, fungsi kuadrat yang mewakili pasangan titik n dan u_n, adalah $u_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 2$.

Sekarang, mari kita uji kebenaran formula tersebut dengan menggunakan induksi matematika.

a) Langkah awal

Untuk $n = 2$, maka diperoleh $u_2 = \frac{1}{2}.(2)^2 + \frac{1}{2}.(2) + 2 = 5$.

Dengan demikian, $P(2) = u_2 = 5$ adalah benar.

b) Langkah induksi

Karena $P(2) = u_2 = 5$ benar, maka $P(3) = u_3 = 8$ juga benar.

Akibatnya, disimpulkan bahwa $P(k) = u_k = \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{2}k + 2$ adalah benar, untuk setiap k bilangan asli. Dengan menggunakan $P(k) = u_k = \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{2}k + 2$, akan ditunjukkan bahwa $P(k + 1) = u_{(k+1)} = \frac{1}{2}(k + 1)^2 + \frac{1}{2}(k + 1) + 2$, juga benar.

Dengan menggunakan $P(k) = u_k = \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{2}k + 2$, kita dapat menuliskan sebanyak k suku barisan bilangan yang mengikuti pola 3, 5, 8, 12, 17, 23, 30, 38, 47, . . ., $(\frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{2}k + 2)$.

Akibatnya, jika kita tuliskan sebanyak $(k + 1)$ suku-suku barisan bilangan tersebut, kita peroleh, 3, 5, 8, 12, 17, 23, 30, 38, 47, . . ., $(\frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{2}k + 2)$, $[\frac{1}{2}(k + 1)^2 + \frac{1}{2}(k + 1) + 2]$.

Dengan demikian diperoleh suku ke $(k + 1)$ barisan bilangan tersebut, yaitu $u_{(k+1)} = \frac{1}{2}(k + 1)^2 + \frac{1}{2}(k + 1) + 2$.

Jadi, $P(k + 1) = u_{(k+1)} = \frac{1}{2}(k + 1)^2 + \frac{1}{2}(k + 1) + 2$, juga benar.

Karena formula $P(n) = u_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 2$ memenuhi kedua prinsip induksi matemati, maka formula tersebut adalah benar, untuk setiap n bilangan asli.

Dengan ditemukan $u_{1.999} = \frac{1}{2}(1.999)^2 + \frac{1}{2}(1.999) + 2$ (pastikan kamu tidak menggunakan alat bantu hitung untuk menentukan).

1.3.2 Penerapan Induksi Matematika pada Keterbagian

Sebelum kita mengkaji lebih jauh tentang penerapan induksi matematika, perlu ditegaskan makna keterbagian dalam hal ini, yaitu habis dibagi bukan hanya dapat dibagi. Tentu kamu dapat membedakan dapat dibagi dan habis dibagi. Misalnya, 36 habis dibagi 3, tetapi 36 tidak habis dibagi oleh 7. Pada subbab ini, kita akan mengkaji bagaimana penerapan prinsip induksi matematika pada konsep keterbagian suatu formula bilangan asli.
Mari kita cermati masalah berikut ini.

Contoh 1.5

Dengan induksi matematika, tunjukkan bahwa $11^n - 6$ habis dibagi 5, untuk n bilangan asli.

Alternatif Penyelesaian:

Kita misalkan $P(n) = 11^n - 6$, dengan n bilangan asli.
Pada contoh ini kita harus menunjukkan bahwa $11^n - 6$ dapat dituliskan sebagai bilangan kelipatan 5. Akan ditunjukkan bahwa $P(n)$ memenuhi kedua prinsip induksi matematika.

a) Langkah Awal
   Kita dapat memilih $n = 3$, sedemikian sehingga, $11^3 - 6 = 1.325$ dan 1.325 habis dibagi 5, yaitu $1.325 = 5(265)$.
   Dengan demikian $P(3)$ habis dibagi 5.

b) Langakah Induksi
   Karena $P(3)$ benar, maka $P(4)$ benar, sedemikian sehingga disimpulkan $P(k) = 11^k - 6$ benar, untuk k bilangan asli. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa jika $P(k) = 11^k - 6$ habis dibagi 5, maka $P(k + 1) = 11^{(k+1)} - 6$ habis dibagi 5.

Karena $11^k - 6$ habis dibagi 5, maka dapat kita misalkan $11^k - 6 = 5m$, untuk m bilangan bulat positif. Akibatnya, $11^k = 5m + 6$.

Bentuk $11^{k+1} - 6 = 11^k(11) - 6$,

$= (5m + 6)(11) - 6$ (karena $11^k = 5m + 6$)

$= 55m + 60$

$= 5(11m + 12)$.

Dengan demikian $P(k + 1) = 11^{(k+1)} - 6$ dapat dinyatakan sebagai kelipatan 5, yaitu $5(11m + 12)$.

Jadi benar bahwa $P(k + 1) = 11^{(k+1)} - 6$ habis dibagi 5.

Karena $P(n) = 11^n - 6$ memenuhi kedua prinsip induksi matematika, maka terbukti $P(n) = 11^n - 6$ habis dibagi 5, untuk n bilangan asli.

Contoh 1.6

Untuk n bilangan asli, $x \neq y$, buktikan dengan induksi matematika bahwa $x^n - y^n$ habis dibagi $(x - y)$.

Alternatif Penyelesaian:

Misalkan $P(n) = x^n - y^n$.

Untuk membuktikan $P(n) = x^n - y^n$ habis dibagi $(x - y)$, artinya $P(n)$ dapat dituliskan sebagai kelipatan $x - y$. Oleh karena itu, akan ditunjukkan $P(n) = x^n - y^n$ memenuhi kedua prinsip induksi matematika.

a) Langkah Awal

Untuk $n = 1$, sangat jelas bahwa $x - y = (x - y) \times 1$.

Demikian halnya untuk $n = 2$ diperoleh bahwa $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$.

Artinya jelas bahwa $P(2) = x^2 - y^2$ habis dibagi $(x - y)$.

b) Langkah Induksi

Pada bagian langkah induksi, kita peroleh bahwa $P(2)$ benar. Karena $P(2)$ benar, maka $P(3)$ juga benar. Namun, perlu kita selidiki pola hasil bagi yang diperoleh untuk $n \geq 3$.

- Untuk $n = 3$, maka $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$.
- Untuk $n = 4$, maka $x^4 - y^4 = (x - y)(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3)$.
- Untuk $n = 5$, maka $x^5 - y^5 = (x - y)(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4)$.

Dari pola tersebut, tentu kamu dapat menyimpulkan pola hasil bagi yang akan ditemukan, sedemikian sehingga kita dapat menyimpulkan bahwa untuk $n = k$, maka $P(k) = x^k - y^k = (x - y)(x^{k-1}y^0 + x^{k-2}y^1 + x^{k-3}y^2 + \ldots + x^0y^{k-1})$.

Oleh karena itu, disimpulkan bahwa $P(k) = x^k - y^k$ habis dibagi $x - y$.

Selain itu, juga dapat kita simpulkan bahwa $P(k - 1) = x^{k-1} - y^{k-1}$ juga habis dibagi $(x - y)$, (kenapa?).

Untuk mempermudah dalam penulisan, kita misalkan $q = (x^{k-1}y^0 + x^{k-2}y^1 + x^{k-3}y^2 + \ldots + x^0y^{k-1})$ dan $r = (x - y)$, sehingga $x^k - y^k = (r)(q)$.

Akibatnya, $x^k = (r)(q) + y^k$ dan $y^k = x^k - (r)(q)$.

Karena $x^k = (r)(q) + y^k$, maka $x \cdot x^k = x^{k+1} = (x)(r)(q) + (x)(y^k)$, (1.a)

$y^k = x^k - (r)(q)$, maka $y \cdot y^k = y^{k+1} = yx^k - (y)(r)(q)$ (1.b)

Dari Persamaan (1.a) dan (1.b), diperoleh,

$$\begin{aligned} x^{k+1} - y^{k+1} &= [(x)(r)(q) + (x)(y^k)] - [yx^k - (y)(r)(q)] \\ &= (r)(q)[x + y] + (x)(y^k) - (y)(x^k) \\ &= (x + y)(r)(q) - [(x)(y)(x^{k-1}) - (x)(y)(y^{k-1})] \\ &= (x + y)(r)(q) - (x)(y)[x^{k-1} - y^{k-1}] \end{aligned}$$

Oleh karena itu, $x^{k+1} - y^{k+1} = (x + y)(r)(q) - (x)(y)[x^{k-1} - y^{k-1}]$.

$(x + y)(r)(q)$ habis dibagi $(x - y)$ karena $r = x - y$, dan $[x^{k-1} - y^{k-1}]$ juga habis dibagi $(x - y)$, maka $(x + y)(r)(q) - (x)(y)[x^{k-1} - y^{k-1}]$ habis dibagi $(x - y)$.
Dengan demikian, $P(k + 1) = x^{k+1} - y^{k+1}$ habis dibagi $(x - y)$.
Karena $P(n) = x^n - y^n$ memenuhi kedua prinsip induksi matematika, maka terbukti bahwa $P(n) = x^n - y^n$ habis dibagi $(x - y)$, dengan $x \neq y$ dan n bilangan asli.

1.3.3 Penerapan Induksi Matematika pada Ketidaksamaan (Ketaksamaan)

Pada subbab ini, kita memperluas kajian penerapan Prinsip Induksi Matematika dalam formula yang dinyatakan dalam bentuk ketidaksamaan matematik. Untuk lebih jelasnya mari kita cermati contoh berikut ini.

Contoh 1.7

Buktikan bahwa $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 > \frac{n^3}{3}$, untuk setiap n bilangan asli.

Alternatif Penyelesaian:

Misalkan $P(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 > \frac{n^3}{3}$, $n \in \mathbb{N}$.

Akan ditunjukkan bahwa $P(n)$ memenuhi kedua prinsip induksi matematika.

a) Langkah Awal

Untuk $n = 3$, maka $P(3) = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14 > \frac{27}{3}$.
Terbukti bahwa $P(3)$ benar.

b) Langkah Induksi

Karena $P(3)$ benar, maka $P(4) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30 > \frac{64}{3}$, juga benar.

Demikian seterusnya hingga dapat disimpulkan bahwa untuk $n = k$

$P(k) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 > \frac{k^3}{3}$ adalah benar.
Selanjutnya akan dibuktikan bahwa untuk $n = k + 1$, maka

$$P(k + 1) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (k + 1)^2 > \frac{(k+1)^3}{3}$$

Karena $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 > \frac{k^3}{3}$, jika kedua ruas ditambahkan $(k + 1)^2$,

diperoleh $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k + 1)^2 > \frac{k^3}{3} + (k + 1)^2$

$$\Leftrightarrow P(k + 1) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k + 1)^2 > \frac{k^3 + 3k^2 + 6k + 3}{3}$$

$$\Leftrightarrow P(k + 1) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k + 1)^2 > \frac{(k+1)^3 + 3k + 2}{3}$$

Padahal $\frac{(k+1)^3 + 3k + 2}{3} = \frac{(k+1)^3}{3} + \frac{3k+2}{3} > \frac{(k+1)^3}{3}$, untuk setiap k bilangan bulat positif.

Akibatnya, $P(k + 1) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k + 1)^2 > \frac{(k+1)^3}{3}$.

Dengan demikian terbukti bahwa, $P(k+1) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 > \frac{(k+1)^3}{3}$ adalah benar.

Karena $P(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 > \frac{n^3}{3}$ memenuhi kedua prinsip induksi matematika, maka formula $P(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 > \frac{n^3}{3}$ adalah benar, untuk setiap n bilangan asli.

Contoh 1.8

Diberikan $x_1 = 1$ dan $x_{n+1} = \sqrt{1+2x_n}$, n bilangan asli.
Buktikan bahwa $x_n < 4$, untuk setiap $n \geq 1$.

Alternatif Penyelesaian:

Dengan $x_1 = 1$, kita dapat menentukan nilai untuk setiap x_n, $n \geq 1$.
Akan ditunjukkan bahwa $P(n) = x_n < 4$ dengan $x_{n+1} = \sqrt{1+2x_n}$, $x_1 = 1$, $n \geq 1$ memenuhi kedua prinsip induksi matematika.

a) Langkah Awal

Untuk $n = 1$, diperoleh $P(2) = x_2 = \sqrt{1+2x_1} = \sqrt{1+2.(1)} = \sqrt{3}$.

Akibatnya $P(2) = x_2 = \sqrt{3}$, dan $\sqrt{3} < \sqrt{16}$.

Dengan demikian terbukti bahwa $P(2) = x_2 = \sqrt{3} < 4$.

b) Langkah Induksi

$P(3) = x_3 = \sqrt{1+2x_2} = \sqrt{1+2\sqrt{3}} < \sqrt{1+2\sqrt{\frac{9}{4}}} = 4$. Dengan demikian diperoleh $P(3)$ benar.

Dengan cara yang sama, karena $P(4)$ benar maka $P(5)$ benar. Demikian seterusnya hingga disimpulkan $P(k) = x_k = \sqrt{1+2x_{k-1}} < 4$.

Untuk $n = k + 1$, maka $x_{(k+1)+1} = x_{k+2} = \sqrt{1+2.x_{k+1}}$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $x_{k+2} = \sqrt{1+2.x_{k+1}} < 4$.

Jika kita mengkaji lebih jauh hubungan antar suku-suku barisan x_i, dapat dituliskan bahwa:

- Jika $k = 3$, maka $x_4 = \sqrt{1+2x_3} = \sqrt{1+2\sqrt{3}} < \sqrt{1+2\sqrt{\frac{9}{4}}} = 4$.

- Jika $k = 4$, maka $x_5 = \sqrt{1+2x_4} = \sqrt{1+2\sqrt{1+2\sqrt{3}}} < \sqrt{1+2\sqrt{\frac{9}{4}}} = 4.$
- Jika $k = 5$, maka $x_5 = \sqrt{1+2x_4} = \sqrt{1+2\sqrt{1+2\sqrt{3}}} < \sqrt{1+2\sqrt{\frac{9}{4}}} = 4.$.
- $\vdots$
- Jika $k = m$, maka $x_{m+1} = \sqrt{1+2\sqrt{x_m}} < \sqrt{1+2\sqrt{\frac{9}{4}}} = 4$, untuk setiap m bilangan asli.
- Jika $k = m+1$, maka $x_{(m+1)+1} = \sqrt{1+2\sqrt{x_{m+1}}} < \sqrt{1+2\sqrt{\frac{9}{4}}} = 4$, untuk setiap m bilangan asli.

Akibatnya diperoleh bahwa $P(k+1) = x_{(k+1)+1} = x_{k+2} = \sqrt{1+2x_{k+1}} < 4$.

Jadi, terbukti $P(n) = x_n < 4$ dengan $x_{n+1} = \sqrt{1+2x_n}$, $x = 1, n \geq 1$ memenuhi kedua prinsip induksi matematika, sedemikian sehingga $P(n)$ benar.

Untuk pembahasan baik masalah maupun contoh yang dikaji mulai Sub bab 1.2, ditemukan bahwa setiap formula yang diberikan/ada selalu terbukti kebenarannya dengan menggunakan induksi matematika. Akan tetapi, apakah benar untuk setiap formula yang diberikan selalu memenuhi kedua prinsip induksi matematika? Mari kita cermati kasus berikut ini.

Contoh 1.9

Dengan menggunakan induksi matematika, selidiki kebenaran pernyataan, untuk setiap bilangan asli, $P(n) = n^2 - n + 41$ adalah bilangan prima.

Alternatif Penyelesaian:

Sebelumnya kamu sudah mengetahui konsep bilangan prima. Untuk menyelidiki kebenaran pernyataan $P(n) = n^2 - n + 41$ adalah bilangan prima, akan dikaji apakah pernyataan tersebut memenuhi kedua prinsip induksi matematika.

Langkah Awal

Untuk menyelidiki pernyataan $P(n)$, kita tidak cukup hanya menyelidiki untuk $n = 1$, $n = 2$. Mari kita cermati yang disajikan pada tabel berikut.

Tabel 1.2 $P(n) = n^2 - n + 41$, untuk n bilangan asli

n	$n^2 - n + 41$	Prima?
1	41	Ya
2	43	Ya
3	47	Ya
4	53	Ya
5	61	Ya

Pada Tabel 1.2, penyelidikan telah dilakukan bahkan hingga $n = 5$, dan semuanya merupakan bilangan prima. Namun, ada n bilangan asli yang mengakibatkan $P(n)$ bukan bilangan prima, yaitu $n = 41$.

Karena langkah awal dari prinsip induksi matematika tidak dipenuhi, maka disimpulkan bahwa $P(n) = n^2 - n + 41$, untuk setiap n bilangan asli bukan merupakan formula bilangan prima.

Uji Kompetensi 1.2

1. Buktikan bahwa pernyataan berikut ini adalah salah.
   a) Jika n bilangan asli, maka terdapat paling sedikit satu bilangan prima p sedemikian sehingga $n < p < n + 6$,
   b) Jika a, b, c, d merupakan bilangan bulat positif sedemikian sehingga $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$, maka $a = c$ atau $a = d$.

   Sertakan alasan untuk setiap jawaban yang kamu berikan.

2. Rancang suatu formula untuk setiap pola barisan yang diberikan.
   a) 5, 13, 21, 29, 37, 45, . . .
   b) 6, 15, 30, 51, 78, 111, . . .
   c) 0, 6, 16, 30, 48, 70, . . .
   d) –2, 1, 6, 13, 22, 33, . . .
   e) –1, 8, 23, 44, 71, 104, . . .

   Jelaskan alasan untuk setiap formula yang kamu peroleh.

3. Selidiki kebenaran setiap pernyataan matematis berikut ini.
   a) $3^2 + 4^2 = 5^2$
      $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$
   b) Untuk setiap n bilangan asli, $P(n) = n^2 + 21n + 1$ adalah bilangan prima.

4. Untuk soal nomor 2, buktikan formula yang ditemukan dengan menggunakan induksi matematika.

5. Diketahui $n \in N$, gunakan prinsip induksi matematika, untuk membuktikan sifat-sifat berikut.
   a) $(ab)^n = a^n.b^n$,
   b) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$,
   c) Diketahui $x_1 \neq 0, x_2 \neq 0, x_3 \neq 0, \ldots x_n \neq 0$, maka
      $(x_1 . x_2 . x_3 . \ \ldots \ .x_n)^{-1} = x_1^{-1} \cdot x_2^{-1} \cdot x_3^{-1} \cdot \ldots x_n^{-1}$,
   d) Diketahui $x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0, \ldots, x_n > 0$, maka
      $\log (x_1 .x_2 .x_3 . \ \ldots \ .x_n) = \log x_1 + \log x_2 + \log x_3 + \ldots + \log x_n$,
   e) $x(y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_n) = xy_1 + xy_2 + xy_3 + \ldots + xy_n$.

Untuk soal nomor 6 – nomor 15, gunakan induksi matematika untuk membuktikan setiap formula yang diberikan.

6. $\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$
7. $x^n - 1$ habis dibagi oleh $x - 1$, $x \neq 1$, n bilangan asli.
8. Salah satu faktor dari $n^3 + 3n^2 + 2n$ adalah 3, n bilangan asli.
9. Salah satu faktor dari $2^{2n-1} + 3^{2n-1}$ adalah 5, n bilangan asli.
10. $41^n - 14^n$ adalah kelipatan 27.
11. $4007^n - 1$ habis dibagi 2003, n bilangan asli.
12. $2002^{n+2} + 2003^{2n+1}$ habis dibagi 4005.
13. Diberikan $a > 1$, buktikan $a^n > 1$, n bilangan asli.

14. Diketahui $0 < a < 1$, buktikan $0 < a^n < 1$, n bilangan bulat positif.
15. Untuk setiap n bilangan asli, buktikan bahwa $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$.

Soal Projek

Diberikan tiga tiang yang di dalamnya disusun sebanyak n piringan berlubang, dengan ukuran piringan terbesar berada paling bawah tumpukan, kemudian disusun hingga piringan paling kecil berada paling atas. Misalnya seluruh tumpukan piringan ada pada tiang pertama dan akan dipindahkan ke salah satu tiang, dengan aturan bahwa setiap pemidahan piringan harus tersusun dengan piringan kecil harus berada di atas piringan yang lebih besar.

Berapa kali pemidahan n piringan tersebut sedemikian sehingga seluruh piringan berada pada satu tiang yang lain.

Selesaikan masalah di atas. Jelaskan proses yang kamu temukan di depan guru dan temanmu. Pastikan cara yang kamu peroleh merupakan cara yang paling efektif.

D. Penutup

Beberapa hal penting yang diperlukan dari pembelajaran Induksi Matematika adalah sebagai berikut:

1. Salah satu dasar berpikir dalam matematika ialah penalaran deduktif. Berbeda dengan penalaran deduktif, penalaran induktif bergantung pada pengerjaan dengan kajian yang berbeda dan pembentukan/perancangan suatu formula melalui indikasi-indikasi untuk setiap pengamatan.
2. Penalaran induksi merupakan penarikan kesimpulan dari berbagai kajian-kajian atau fakta yang valid.
3. Prinsip induksi matematika merupakan suatu alat yang dapat digunakan membuktikan suatu jenis pernyataan matematis. Dengan mengasumsikan $P(n)$ sebagai pernyataan bilangan asli yang benar.
4. Pernyataan bilangan asli $P(n)$ dikatakan terbukti benar menurut prinsip induksi matematika jika memenuhi kedua prinsip induksi matematika.

5. Untuk langkah awal prinsip induksi matematika, pengujian $P(n)$ harus mempertimbangkan nilai n yang besar. Hal ini diperlukan untuk menjamin kebenaran $P(n)$.
6. Jika salah satu dari prinsip induksi matematika tidak dipenuhi oleh suatu pernyataan $P(n)$, maka $P(n)$ salah, untuk setiap n bilangan asli.

Penguasaan kamu terhadap prinsip induksi matematika sangat diperlukan pada saat kamu akan mempelajari konsep barisan dan deret bilangan. Selain itu, jika kamu berminat mempelajari teknik informasi dan kajian komputer, prinsip induksi matematika merupakan salah satu materi prasyarat.

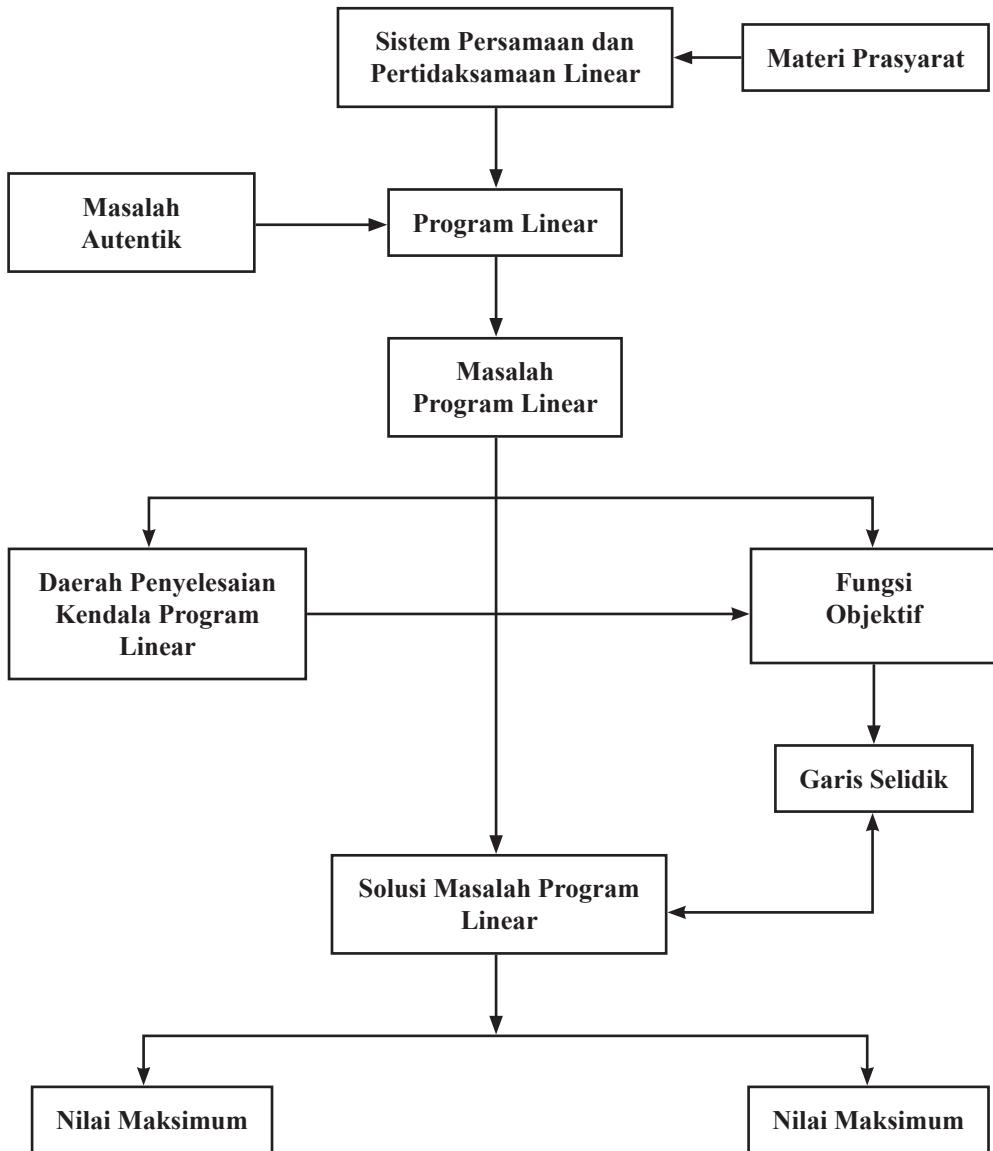
Program Linear

A. Kompetensi Dasar dan Pengalaman Belajar

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
Setelah mengikuti pembelajaran program linear siswa mampu: 3.2 Menjelaskan program linear dua variabel dan metode penyelesaiannya dengan menggunakan masalah kontekstual. 4.2 Menyelesaikan masalah kontekstual yang berkaitan dengan program linear dua variabel.	Melalui pembelajaran program linear, siswa memperoleh pengalaman belajar: • berlatih berpikir kreatif dan kritis dalam memecahkan masalah; • menunjukkan sikap tanggung jawab dalam menyelesaikan masalah; • menganalisis masalah secara konsisten dan jujur; • mengamati fenomena masalah optimasi dalam kehidupan sehari-hari; • menunjukkan kemampuan dalam memaksimalkan waktu dan hasil belajar.

Istilah Penting

- Kendala/Keterbatasan (*Constraint*)
- Optimum (Maksimum atau minimum)
- Daerah Layak, Daerah Jawab, Daerah Penyelesaian
- Garis Selidik
- Titik Optimum

B. Diagram Alir

C. Materi Pembelajaran

2.1 Pertidaksamaan Linear Dua Variabel

Konsep persamaan dan sistem persamaan linear dua variabel sudah kamu pelajari. Dalam pertidaksamaan, prinsip yang ada pada persamaan juga kita gunakan dalam menyelesaikan pertidaksamaan atau sistem pertidaksamaan linear dua variabel. Prinsip yang dimaksud adalah menentukan nilai variabel yang memenuhi pertidaksamaan atau sistem pertidaksamaan linear tersebut.

Dalam kehidupan sehari-hari, banyak kita jumpai kasus yang melibatkan pembatasan suatu hal. Contohnya, lowongan kerja mensyaratkan pelamar dengan batas usia tertentu, batas nilai cukup seorang pelajar agar dinyatakan lulus dari ujian, dan batas berat bersih suatu kendaraan yang diperbolehkan oleh dinas perhubungan. Perhatikan beberapa masalah pertidaksamaan berikut.

Masalah 2.1

Santi berbelanja di toko peralatan sekolah dengan uang yang tersedia Rp250.000,00. Harga setiap barang di toko tersebut telah tersedia di daftar harga barang sehingga Santi dapat memperkirakan peralatan sekolah apa saja yang sanggup dia beli dengan uang yang dia miliki. Berdasarkan daftar harga, jika Santi membeli 2 seragam sekolah dan 3 buku maka dia masih mendapatkan uang kembalian. Dapatkah kamu memodelkan harga belanjaan Santi tersebut?

Alternatif Penyelesaian:

Dengan memisalkan harga seragam sekolah = x dan harga buku = y maka permasalahan di atas dapat dimodelkan sebagai berikut:
Santi membeli 2 seragam sekolah dan 3 buku dan mendapatkan uang kembalian mempunyai arti $2x + 3y < 250.000$. (2a)

Untuk menentukan himpunan penyelesaian (2a), kita pilih x dan y yang memenuhi (2a). Selengkapnya kita sajikan pada tabel berikut.

Tabel 2.1: Semua kemungkinan nilai x dan y yang memenuhi $2x + 3y < 250.000$

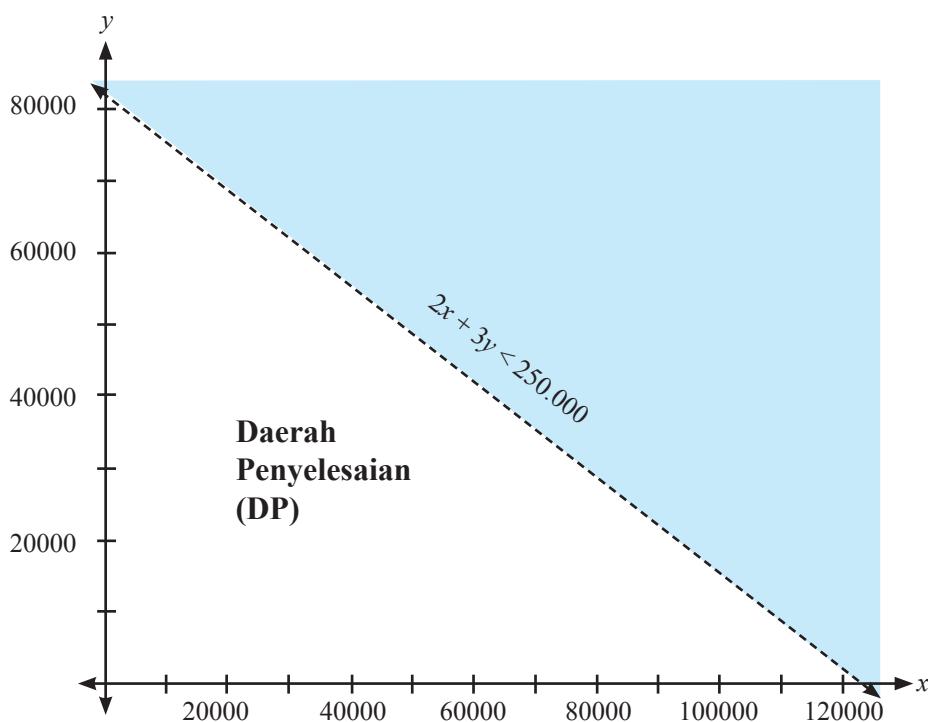
x (Rp)	y (Rp)	$2x + 3y$ (Rp)	Uang kembalian (Rp)
20.000	5.000	55.000	195.000
30.000	6.000	78.000	172.000
40.000	10.000	110.000	140.000
50.000	20.000	160.000	90.000
…..	…..	…..	…..

Tabel di atas masih dapat dilanjut hingga tak hingga banyaknya nilai x dan y yang memenuhi (2a).

i. Untuk mengisi tabel di atas, berikan penjelasan jika $x = 0$ dan $y = 90.000$.

ii. Menurut kamu, berapa harga paling mahal satu baju dan harga paling mahal satu buku yang mungkin dibeli oleh Santi? Berikan penjelasan untuk jawaban yang kamu berikan.

Dengan demikian pasangan nilai x dan y yang memenuhi (2a), dapat kita tuliskan dalam himpunan dan terdapat banyak nilai x dan y yang memenuhi pertidaksamaan $2x + 3y < 250.000$, tetapi kamu harus mempertimbangkan nilai x dan y dengan realita yang ada.

Secara geometris, himpunan penyelesaian di atas, diilustrasikan sebagai berikut.

Gambar 2.1: Daerah penyelesaian pertidaksamaan $2x + 3y < 250.000$

Keterangan gambar:

- Daerah yang tidak diarsir adalah daerah yang memenuhi.
- Garis putus – putus bermakna, tanda pertidaksamaan " > " atau "<" bukan "≤" atau "≥". Untuk pertidaksamaan yang menggunakan tanda "≤" atau "≥", grafik garisnya berupa garis lurus.
- Tentunya kamu tahu, alasannya kenapa garis putus-putus tersebut hanya di kuadran I.

Dalam buku ini, untuk semua grafik persamaan linear atau sistem pertidaksamaan linear, ***Daerah Bersih*** *merupakan* ***daerah penyelesaian*** *pertidaksamaan atau sistem pertidaksamaan yang dikaji.*

Dengan melihat spasi pada grafik di atas, kita dapat menemukan tak hingga banyaknya pasangan x dan y yang terletak pada daerah yang memenuhi. Misalnya x = 100.000, dan y = 10.000, sedemikian sehingga menjadikan pertidaksamaan (2a) bernilai benar, karena 200.000 + 30.000 = 230.000 < 250.000. Tentunya, kamu dapat memilih titik yang tak hingga banyaknya yang terdapat pada daerah penyelesaian.

Masalah 2.2

Pak Rianto, seorang petani di desa Magelang, memiliki lahan berbentuk persegi panjang seluas 600 m^2. Dia hendak menanam jagung dan kentang di lahan tersebut. Karena tidak selalu tersedia modal yang cukup, Pak Rianto tidak memungkinkan untuk mengolah seluruh lahannya, akan tetapi dia ingin lahannya lebih luas ditanami kentang. Tentukan luas lahan yang mungkin untuk ditanam jagung dan kentang.

Alternatif Penyelesaian:

Misalkan p = luas lahan yang ditanami jagung (m^2)
q = luas lahan yang ditanami kentang (m^2).

Dengan demikian, luas lahan yang ditanami jagung ditambah dengan luas lahan yang ditanami kentang kurang dari atau sama dengan 600 m^2, dan lahan yang ditanami kentang lebih luas dari lahan yang ditanami jagung, secara matematik dituliskan:

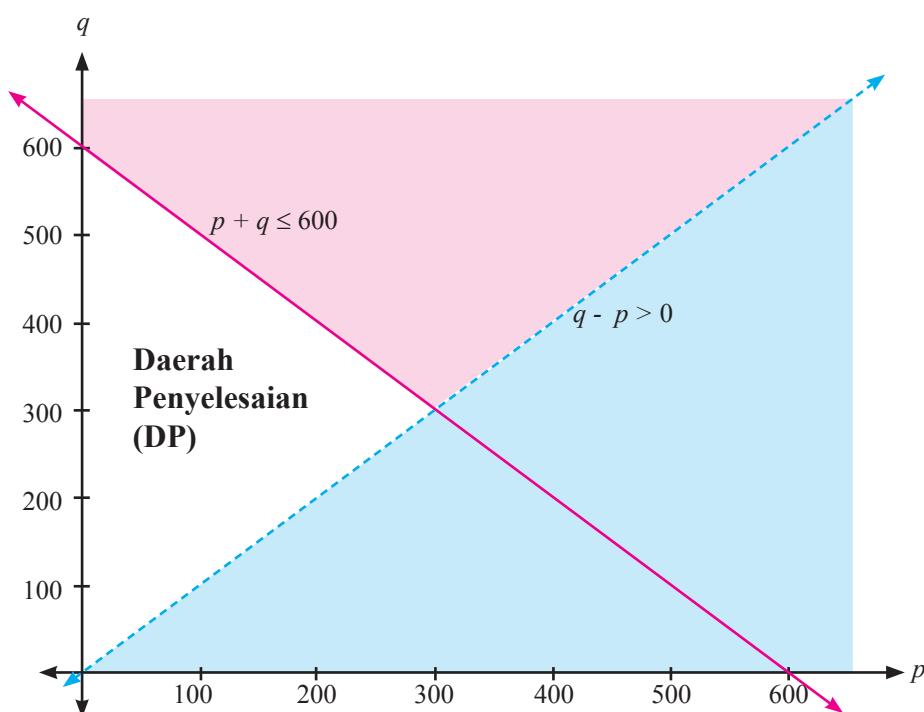
$$p + q \leq 600. \qquad (2b)$$

$$q > p \leftrightarrow q - p > 0 \qquad (2c)$$

Dengan pengalaman menyelesaikan Masalah 2.1, diharapkan kita akan mudah menentukan semua nilai p dan q yang memenuhi (2b) dan (2c). Selengkapnya disajikan pada tabel berikut.

Tabel 2.2: Semua kemungkinan nilai p dan q yang memenuhi $p + q \leq 600$ dan $q - p > 0$

p (m^2)	q (m^2)	$p + q$ (m^2)
100	500	600
200	400	600
250	300	550
250	260	510
…..	…..	…..

Tabel 2.2 dapat kamu lanjutkan, karena tak hingga banyaknya nilai p dan q yang memenuhi (2b) dan (2c). Secara geometri, himpunan penyelesaian pertidaksamaan $p + q \leq 600$ dan $q - p > 0$, disajikan pada gambar berikut.

Gambar 2.2: Daerah penyelesaian pertidaksamaan $p + q \leq 600$ dan $q - p > 0$

Sekali lagi, diingatkan kembali bahwa daerah yang bersih atau daerah yang tidak diarsir adalah daerah yang memenuhi. Kita dapat mengambil suatu titik yang terdapat pada daerah penyelesaian, misalnya titik (100, 480), maka menjadi pertidaksamaan $p + q \leq 600$ bernilai benar, karena $100 + 480 = 580 < 600$. Tentunya kamu dapat menuliskan titik yang tak hingga banyaknya yang terdapat di daerah penyelesaian dan memenuhi $p + q \leq 600$ dan $q > p$.

Masalah 2.3

Harlen, mengikuti ujian AKPOL pada tahun 2014. Sistem ujian yang selektif dan kompetetif, mengharuskan setiap peserta ujian harus memiliki nilai gabungan tes tertulis dan tes fisik minimal 65, dengan bobot 0,6 untuk nilai tes tertulis dan 0,4 tes fisik. Namun, untuk setiap tes harus memiliki nilai minimal 55.

Nyatakanlah masalah ini dalam simbol matematik dan tentukanlah himpunan penyelesaiannya.

Alternatif Penyelesaian:

Misalkan r = nilai tes tertulis yang diperoleh Harlen
s = nilai tes fisik yang diperoleh Harlen.

Diketahui bahwa bobot untuk setiap nilai tes berturut-turut adalah 0,6 dan 0,4. Untuk dinyatakan lulus, maka nilai gabungan tes tertulis dan fisik yang diraih Harlen minimal 65, secara matematik dapat dituliskan:

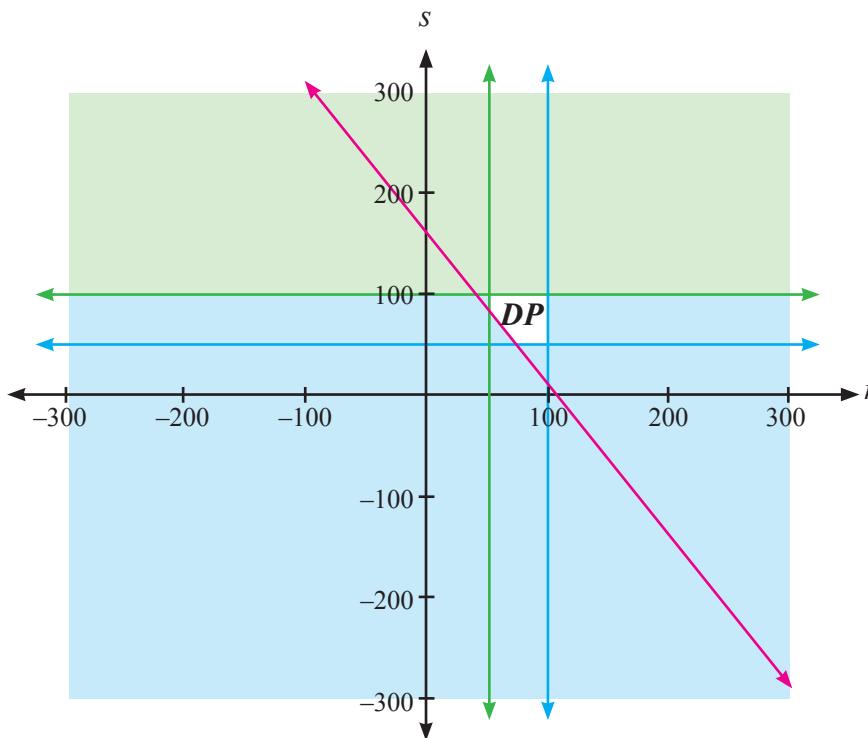
$$\left.\begin{array}{l}(0,6 \times r) + (0,4 \times s) \geq 65 \\ 55 \leq r \leq 100 \\ 55 \leq s \leq 100\end{array}\right\} \quad (2d)$$

Nilai variabel r dan s yang memenuhi (2d), dinyatakan pada tabel berikut.

Tabel 2.3: Semua kemungkinan nilai r dan s yang memenuhi (2d)

r	s	$(0,6 \times r + 0,4 \times s)$
55	90	69
58	80	66,8
65	70	67
80	80	80
. . . .	. . . .	. . . .

Tentunya, kamu dapat meneruskan mengisi Tabel 2.3, karena terdapat tak hingga banyaknya nilai r dan s yang memenuhi (2d).

Secara geometris, himpunan penyelesaian diilustrasikan sebagai berikut.

Gambar 2.3: Daerah penyelesaian pertidaksamaan (2d)

Jika melihat daerah penyelesaian pada grafik di atas, seakan-akan hanya sedikit pasangan titik yang terdapat pada daerah penyelesaian tersebut. Hal ini, yang menegaskan bahwa tidak cukup yang memberikan grafik atau gambar untuk bukti atau jawaban untuk suatu masalah. Tetapi, kita masih dapat memilih titik-titik pada daerah penyelesaian sedemikian sehingga menjadikan pertidaksamaan (2c) bernilai benar, misalnya $r = 75{,}5$ dan $s = 70{,}2$ akibatnya $[(0{,}6) \times (75{,}5)] + [(0{,}4) \times (70{,}2)] = 73{,}38 \geq 65$.

Tentunya masih banyak masalah kontekstual yang dapat kita modelkan menjadi pertidaksamaan linear dua variabel. Nah, dari Masalah 2.1, Masalah 2.2, dan Masalah 2.3 dapat kita simpulkan definisi pertidaksamaan linear dua variabel.

Definisi 2.1

Pertidaksamaan linear dua variabel adalah pertidaksamaan yang berbentuk
$ax + by + c < 0$
$ax + by + c \leq 0$
$ax + by + c > 0$
$ax + by + c \geq 0$

dengan:
a, b : koefisien ($a \neq 0$, $b \neq 0$, $a,b \in R$)
c : konstanta ($c \in R$)
x, y : variabel ($x, y \in R$)

Perlu kamu ingat bahwa untuk setiap pertidaksamaan linear dua variabel, pada umumnya, memiliki himpunan penyelesaian yang tak hingga banyaknya.

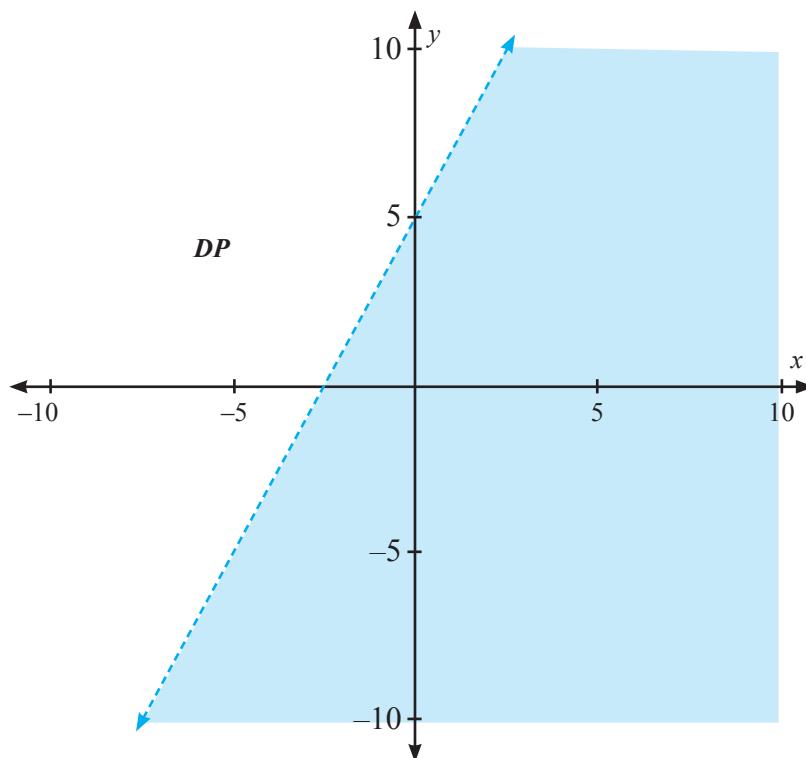
Contoh 2.1

Tentukan himpunan penyelesaian dan gambarkan grafik untuk setiap pertidaksamaan di bawah ini.

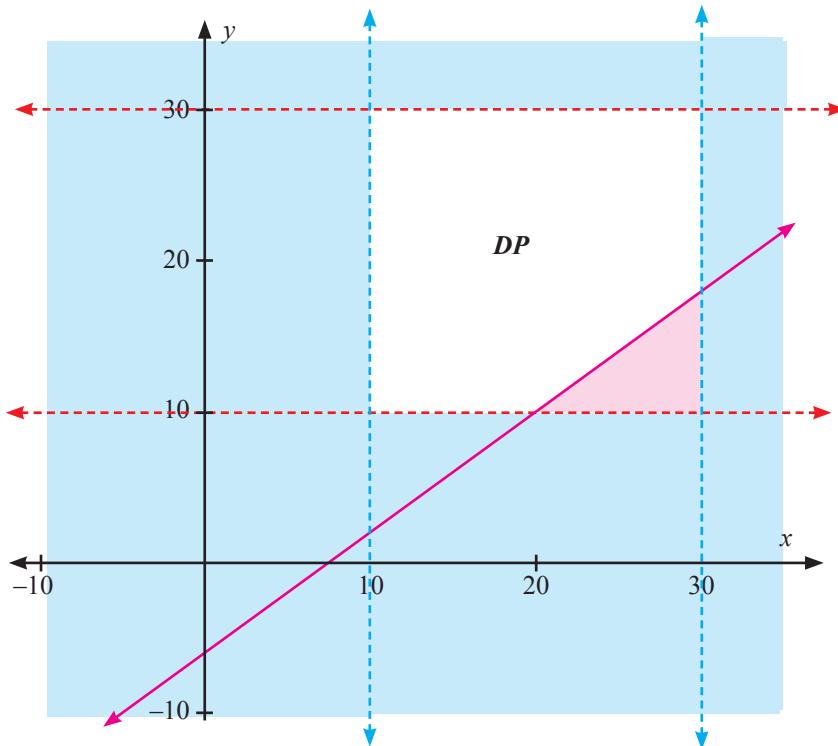
a. $-2x + y > 5$, untuk x dan y semua bilangan real
b. $4x - 5y \leq 30$, dengan $10 < x < 30$ dan $10 < y < 30$ untuk x dan y semua bilangan real.
c. $x + 3y \geq 30$, untuk x dan y semua bilangan real.

Alternatif Penyelesaian:

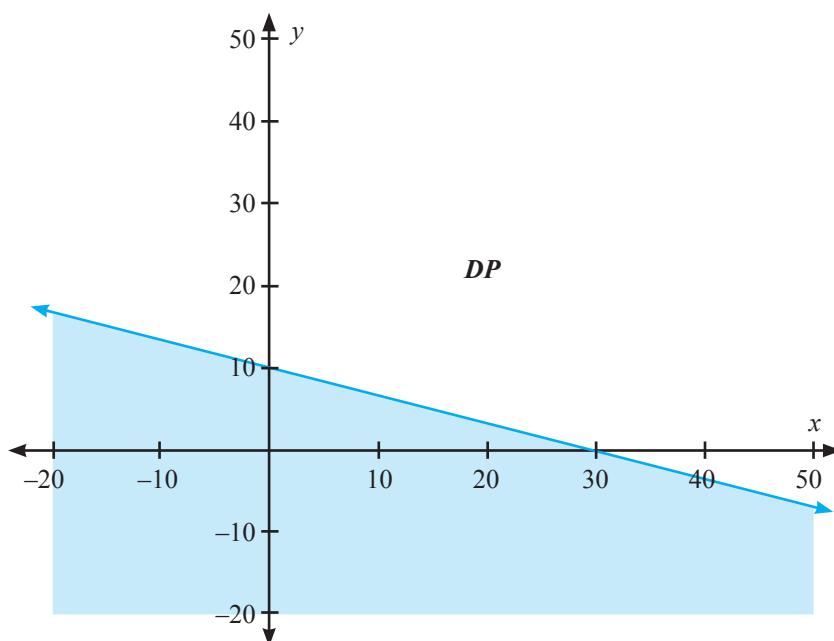
a. Dengan menguji nilai-nilai x dan y yang memenuhi $-2x + y > 5$, maka dapat ditemukan banyak pasangan x dan y yang memenuhi pertidaksamaan.

Ilustrasi himpunan penyelesaian, jika dikaji secara geometris disajikan pada gambar berikut.

Gambar 2.4: Daerah penyelesaian pertidaksamaan $-2x + y > 5$

Dari gambar diperoleh bahwa terdapat titik yang tak hingga banyaknya (daerah yang tidak diarsir) yang memenuhi $-2x + y > 5$. Kali ini, melalui grafik, kita dapat memilih sembarang titik, misalnya titik (–5, 0), sedemikian sehingga $-2(-5) + 0 = 10 > 5$ adalah pernyataan benar.

b. Untuk menentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan $4x - 5y \leq 30$, dengan $10 < x < 30$ dan $10 < y < 30$, kita harus menguji setiap nilai x dan y yang memenuhi $4x - 5y \leq 30$. Misalnya kita ambil $x = 11$ dan $y = 11$, maka $4.11 - 5.11 = -11 \leq 30$ adalah suatu pernyataan yang benar. Tetapi terdapat banyak titik yang memenuhi pertidaksamaan pertidaksamaan $4x - 5y \leq 30$, dengan $10 < x < 30$ dan $10 < y < 30$, bukan? Himpunan penyelesaian bagian b) ini, jika kita ilustrasikan seperti gambar berikut.

Gambar 2.5: Daerah penyelesaian pertidaksamaan $4x - 5y \leq 30$, untuk $10 < x < 30$ dan $10 < y < 30$.

Meskipun nilai x dan y sudah dibatasi, masih terdapat titik yang tak hingga banyaknya (semua titik yang terdapat di daerah penyelesaian) yang memenuhi pertidaksamaan. Misalnya titik (12,5 , 13,2), mengakibatkan $4(12,5) - 5(13,2) = -4 \leq 30$ adalah suatu pernyataan benar.

c. Pertidaksamaan $x + 3y \geq 30$, artinya kita harus memikirkan bilangan x dan y sedemikian sehingga $x + 3y$ paling kecil 30. Jelasnya, tak hingga banyaknya bilangan x dan y yang memenuhi $x + 3y \geq 30$, secara lengkap dituliskan;
Himpunan Penyelesaian = {(0, 10), (–10, 15), (31, 0), (50, –6), ...}.
Secara geometri, himpunan penyelesaian di atas digambarkan sebagai berikut.

Gambar 2.6: Daerah penyelesaian pertidaksamaan $x + 3y \geq 30$, untuk semua x dan y adalah bilangan real.

Pertanyaan Kritis !!!

i. Apakah semua pertidaksamaan memiliki himpunan penyelesaian? Berikan penjelasan atas jawaban kamu.

ii. Misalkan diberikan suatu himpunan penyelesaian suatu pertidaksamaan yang disajikan pada suatu grafik, bagaimana caranya membentuk pertidaksamaan yang memenuhi himpunan penyelesaian tersebut?

2.2 Program Linear

Setiap orang yang hendak mencapai tujuan, pasti memiliki kendala-kendala yang berkaitan dengan tujuan tersebut. Misalnya, seorang petani ingin memanen padinya sebanyak-banyak, tetapi kendala cuaca dan hama terkadang tidak dengan mudah dapat diatasi. Seorang pedagang ingin memperoleh keuntungan sebesar-besarnya tetapi terkendala dengan biaya produksi atau biaya pengangkutan atau biaya perawatan yang besar. Masalah-masalah kontekstual ini, akan menjadi bahan kajian kita selanjutnya.

Mari kita mulai dengan masalah transmigrasi berikut ini.

Masalah 2.4

Sekelompok tani transmigran mendapatkan 10 hektar tanah yang dapat ditanami padi, jagung, dan palawija lain. Karena keterbatasan sumber daya petani harus menentukan berapa bagian yang harus ditanami padi dan berapa bagian yang harus ditanami jagung, sedangkan palawija lainnya ternyata tidak menguntungkan. Untuk suatu masa tanam, tenaga yang tersedia hanya 1.550 jam-orang, pupuk juga terbatas, tak lebih dari 460 kilogram, sedangkan air dan sumber daya lainnya cukup tersedia. Diketahui pula bahwa untuk menghasilkan 1 kuintal padi diperlukan 10 jam-orang tenaga dan 5 kilogram pupuk, dan untuk 1 kuintal jagung diperlukan 8 jam-orang tenaga dan 3 kilogram pupuk. Kondisi tanah memungkinkan menghasilkan 50 kuintal padi per hektar atau 20 kuintal jagung per hektar. Pendapatan petani dari 1 kuintal padi adalah Rp40.000,00 sedang dari 1 kuintal jagung Rp30.000,00 dan dianggap bahwa semua hasil tanamnya selalu habis terjual.

Masalah bagi petani ialah bagaimanakah rencana produksi yang memaksimumkan pendapatan total? Artinya berapa hektar tanah harus ditanami padi dan berapa hektar tanah harus ditanami jagung

Perumusan Masalah:

Mari kita mengkaji jika hasil padi dan jagung dinyatakan per kuintal. Berdasarkan masalah di atas, diketahui bahwa setiap 1 hektar menghasilkan 50 kuintal padi. Artinya, untuk 1 kuintal padi diperlukan 0,02 hektar. Demikian juga, untuk 1 kuintal jagung diperlukan 0,05 hektar.
Cermati angka-angka yang tersaji pada tabel berikut ini!

Tabel 2.4: Alokasi setiap sumber yang tersedia

Sumber	Padi (perkuintal)	Jagung (perkuintal)	Batas sumber	Satuan
tanah	0,02	0,05	10	Hektar
Tenaga	10	8	1.550	jam-orang
Pupuk	5	3	460	Kilogram
Pendapatan	40	30		Ribuan Rupiah

Catatan:

1. Satuan jam-orang (*man-hour*) adalah banyak orang kali banyak jam bekerja.
   Kita anggap (asumsi) bahwa setiap transmigran memiliki tenaga dan waktu yang relatif sama.
2. Air dianggap berlimpah sehingga tidak menjadi kendala/keterbatasan. Jika ada kendala air maka satuannya adalah banyak jam membuka saluran tersier untuk mengalirkan air ke sawah.
3. Batas ketersediaan dalam soal ini kebetulan semuanya berupa batas atas.

Alternatif Penyelesaian:

Besarnya pendapatan kelompok petani dipengaruhi banyak (kuintal) padi dan jagung yang diproduksi. Tentunya, besar pendapatan tersebut merupakan tujuan kelompok tani, tetapi harus mempertimbangkan keterbatasan sumber (luas tanah, tenaga dan pupuk).

Misalkan x : banyak kuintal padi yang diproduksi oleh kelompok tani
y : banyak kuintal jagung yang diproduksi oleh kelompok tani.

Untuk memperoleh pendapatan terbesar, harus dipikirkan keterbatasan-keterbatasan berikut:

a. Banyak hektar tanah yang diperlukan untuk x kuintal padi dan untuk y kuintal jagung tidak boleh melebihi 10 hektar.
b. Untuk ketersediaan waktu (jam-orang) tiap-tiap padi dan jagung hanya tersedia waktu tidak lebih dari 1.550 jam-orang.
c. Jumlah pupuk yang tersedia untuk padi dan jagung tidak lebih dari 460 kilogram.
d. Dengan semua keterbatasan (kendala) (a), (b), dan (c), kelompok tani ingin mengharapkan pendapatan Rp40.000,00 dan Rp30.000,00 untuk setiap kuintal padi dan jagung.
   - Dari uraian keterbatasan atau kendala pada bagian (a), (b), dan (c) dan tujuan pada bagian (d), bersama temanmu, coba rumuskan model matematika yang mendeskripsikan kondisi yang dihadapi kelompok tani tersebut.

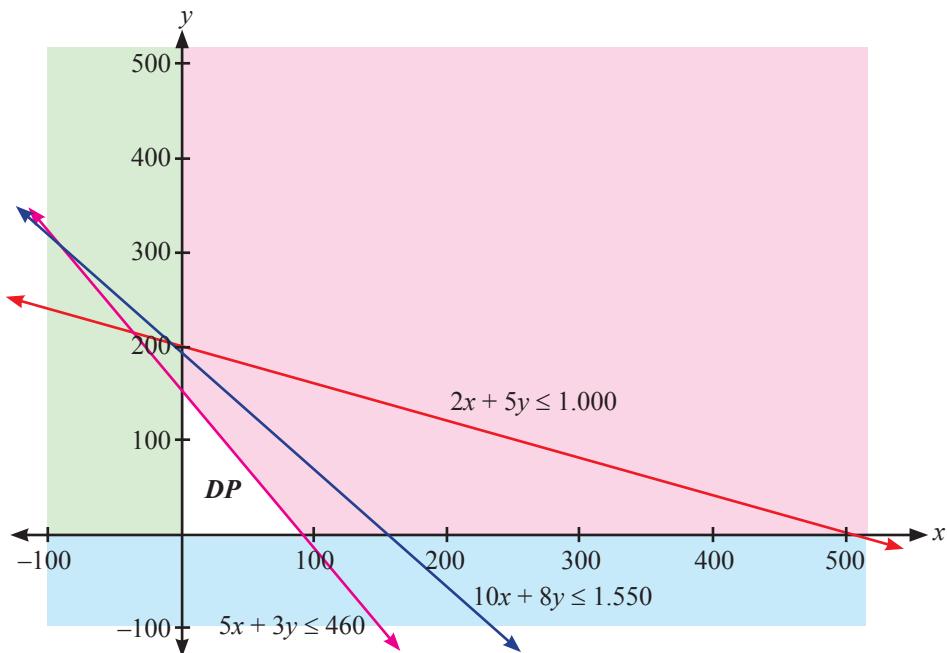
Melihat uraian di atas, masalah kelompok tani transmigran dapat diubah bentuk menjadi suatu sistem pertidaksamaan linear dua variabel. Pemecahan sistem tersebut dapat dikerjakan dengan metode grafik (dibahas pada subbab berikutnya). Hal ini merupakan pengembangan konsep pertidaksamaan linear satu variabel yang telah kamu pelajari pada Kelas X.

Adapun model matematika untuk masalah ini, adalah suatu sistem pertidaksamaan linear dua variabel sebagai berikut:

$$\begin{cases} 0{,}02x + 0{,}05y \leq 10 \\ 10x + 8y \leq 1550 \\ 5x + 3y \leq 460 \end{cases} \quad \text{atau} \quad \begin{cases} 2x + 5y \leq 1000 & \rightarrow \text{kendala lahan} \\ 10x + 8y \leq 1550 & \rightarrow \text{kendala tenaga} \\ 5x + 3y \leq 460 & \rightarrow \text{kendala pupuk} \end{cases} \qquad (1)$$

Karena luas tanah/lahan, banyak waktu, dan banyak pupuk tidak mungkin negatif, kendala ini sebagai kendala nonnegatif, yaitu:

$$\left.\begin{matrix} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{matrix}\right\} \text{kendala nonnegatif} \qquad (2)$$

Secara geometris, kendala (1) dan (2) dapat digambarkan sebagai berikut.

Gambar 2.7: Daerah penyelesaian yang memenuhi pertidaksamaan (1) dan (2).

Adapun langkah-langkah untuk menggambarkan grafik di atas adalah sebagai berikut:

1. Gambarkan setiap pertidaksamaan sebagai suatu persamaan garis lurus. Namun, jika tanda pertidaksamaan menggunakan tanda "<" atau ">", maka garisnya putus-putus.
2. Setiap garis akan membagi dua bidang kartesius, untuk menentukan daerah penyelesaian, ambil sembarang titik di salah satu bagian bidang tadi, misalnya titik A. Kemudian ujian kebenaran pertidaksamaan dengan menggunakan titik A. Jika pertidaksamaan bernilai benar, maka bidang asal titik A merupakan daerah penyelesaian. Jika bernilai salah, maka bidang yang bukan asal titik A merupakan daerah penyelesaian.
3. Ulangi langkah 1 dan 2 untuk semua pertidaksamaan yang telah dirumuskan. Kemudian, perhatikan irisan atau daerah yang memenuhi untuk setiap pertidaksamaan yang diberikan.
4. Perhatikan syarat non – negatif untuk setiap variabel. ***Nilai variabel tidak selalu positif***.

Untuk pendapatan, tentu dimaksimumkan dan sebaliknya untuk biaya tentu diminimumkan. Untuk masalah ini, kelompok tani tentu hendak memaksimumkan pendapatan, melalui memperbanyak kuintal padi dan jagung yang dijual berturut-turut Rp40.000,00 dan Rp30.000,00. Rumusan ini disebut sebagai fungi tujuan; sebut $Z(x, y)$. Secara matematik dituliskan:

Maksimumkan: $Z(x, y) = 40x + 30y$ (dalam satuan ribuan rupiah) (3)

Dengan daerah penyelesaian yang disajikan pada Gambar 2.7, kita harus dapat menentukan nilai maksimum fungsi $Z(x, y)$. Untuk menyelesaikan ini, kita akan bahas pada subbab berikutnya.

Selain masalah transmigrasi, berikut ini kita kaji bagaimana model matematika masalah produksi suatu perusahaan.

Masalah 2.5

Perusahaan "Galang Jaya" memproduksi alat-alat barang elektronik, yaitu transistor, kapasitor, dan resistor. Perusahaan harus mempunyai persediaan paling sedikit 200 resistor, 120 transistor, dan 150 kapasitor, yang diproduksi melalui 2 mesin, yaitu: mesin A, untuk setiap satuan jam kerja hanya mampu memproduksi 20 resistor, 10 transistor, dan 10 kapasitor; mesin B, untuk setiap satuan jam kerja hanya mampu memproduksi 10 resistor, 20 transistor, dan 30 kapasitor. Jika keuntungan untuk setiap unit yang diproduksi mesin A dan mesin B berturut-turut adalah Rp50.000,00 dan Rp120.000,00.
Bentuklah model matematika masalah perusahaan Galang Jaya.

Alternatif Penyelesaian:

Semua data yang diketahui pada masalah ini, kita sajikan pada tabel berikut.

Tabel 2.5: Alokasi setiap sumber yang tersedia

Sumber	Resistor	Transistor	Kapasitor	Keuntungan
Mesin A	….	….	….	….
Mesin B	….	….	….	….
Persediaan	200	120	150	

Dengan memisalkan x: banyak unit barang yang diproduksi mesin A
y: banyak unit barang yang diproduksi mesin B.

Dengan demikian kita dapat menuliskan model matematika yang menggambarkan kondisi pada Tabel 2.5, yaitu:

Kendala Persedian (1*)

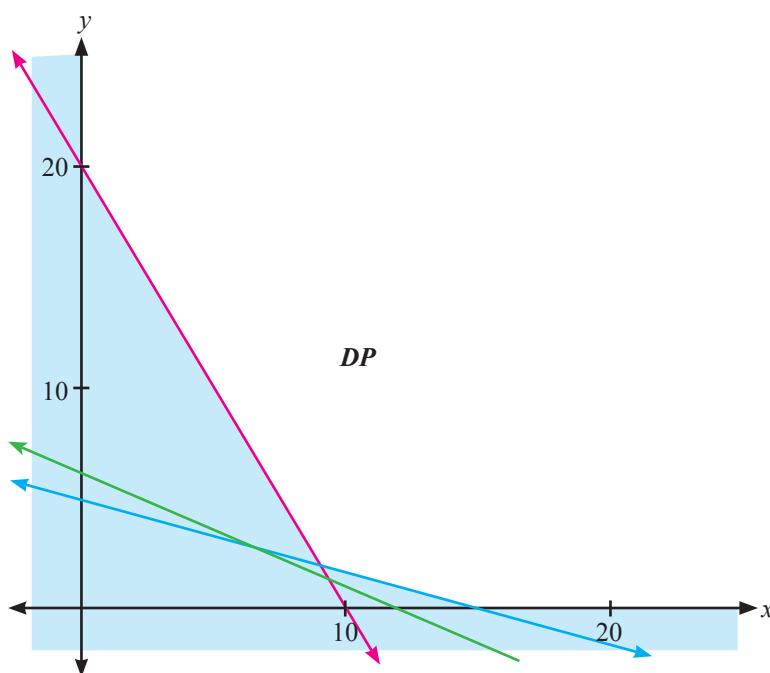
$$\begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 2x + y \geq 20 \\ \ldots\ldots \geq 12 \\ \ldots\ldots \geq 15 \end{cases}$$

Karena banyak barang yang diproduksi tidak mungkin negatif, maka kita dapat menuliskan:

Kendala nonnegatif (2*)

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Artinya, untuk memenuhi persediaan, mungkin saja mesin A tidak berproduksi atau mesin B yang tidak berproduksi.

Secara geometri, kondisi kendala persedian dan kendala non–negatif, disajikan pada gambar berikut.

Gambar 2.8: Daerah penyelesaian yang memenuhi pertidaksamaan (1*) dan (2*).

Untuk menggambarkan sistem pertidaksamaan (1*) dan (2*), ikuti langkah-langkah yang diberikan di atas. Berbeda dengan Masalah 2.4, sistem pertidaksamaan (1*) dan (2*), mempunyai daerah penyelesaian berupa suatu daerah yang tidak terbatas (*unbounded area*).

Selanjutnya, kita dapat menuliskan fungsi tujuan atau fungsi sasaran masalah ini, yaitu pemilik perusahaan tentunya ingin memaksimalkan keuntungan. Dengan demikian, dapat kita tuliskan:

Fungsi Tujuan

Maksimumkan: $f(x, y) = 50.000x + 120.000y$ atau

$f(x, y) = 5x + 12y$ (dalam puluh ribu rupiah)

Jadi, untuk daerah penyelesaian yang diilustrasikan pada Gambar 2.8 di atas, kita akan menentukan nilai maksimum fungsi $f(x, y)$. Hal ini akan kita kaji pada subbab berikutnya.

Dari tiga ciri di atas, dapat kita simpulkan masalah program linear dua variabel dirumuskan sebagai berikut:

Definisi 2.2

Masalah program linear dua variabel adalah menentukan nilai x_1, x_2 yang memaksimumkan (atau meminimumkan) fungsi tujuan,

$Z(x_1, x_2) = C_1x_1 + C_2x_2$

dengan kendala:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &\left(\leq, =, \geq\right) b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &\left(\leq, =, \geq\right) b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 &\left(\leq, =, \geq\right) b_m \\
x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0
\end{aligned}$$

Namun, dalam kajian program linear tidak hanya untuk dua variabel saja, tetapi ada juga kajian program linear tiga variabel bahkan untuk n variabel. Untuk tiga variabel atau lebih dibutuhkan pengetahuan lanjutan tentang teknik menyelesaikan sistem persamaan atau pertidaksamaan linear.

Selain bentuk umum program linear dua variabel di atas, kita juga menyimpulkan konsep tentang daerah penyelesaian, sebagai berikut.

Definisi 2.3

(Daerah Layak/Daerah Penyelesaian/Daerah Optimum)
Daerah penyelesaian masalah program linear merupakan himpunan semua titik (x, y) yang memenuhi kendala suatu masalah program linear.

Untuk memantapkan pengetahuan dan keterampilan kamu dalam menggambarkan sistem pertidaksamaan yang memenuhi suatu masalah program linear, mari kita cermati pembahasan soal berikut ini.

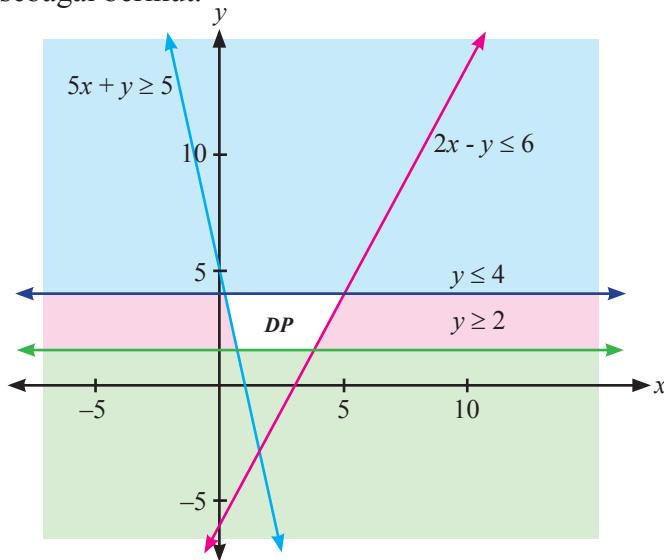
Contoh 2.2

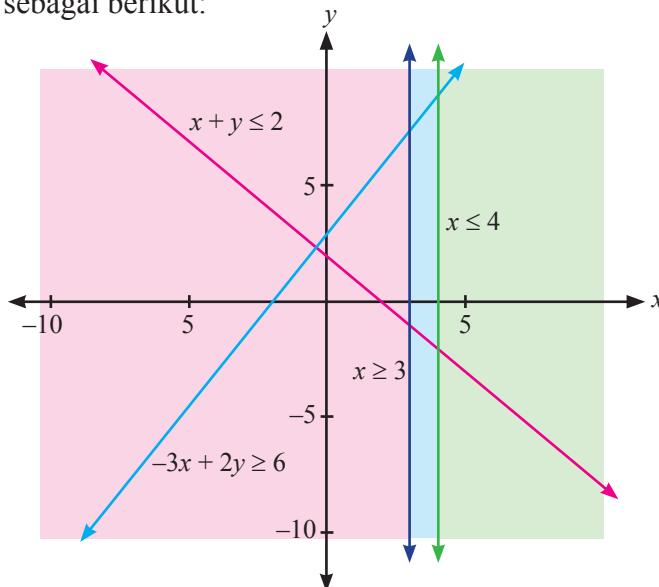
Gambarkan daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan berikut ini.

a) $\begin{cases} 2x - y \leq 6 \\ 5x + y \geq 5 \\ x \geq 0 \\ 2 \leq y \leq 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y \leq 2 \\ -3x + 2y \geq 6 \\ 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$

Alternatif Penyelesaian:

Untuk menggambarkan daerah penyelesaian setiap pertidaksamaan pada sistem di atas, dapat dimulai dengan menggambar satu per satu pertidaksamaan yang diketahui. Tentu, semua daerah penyelesaian tersebut nanti harus disajikan dalam satu bidang koordinat kartesius.

a. Daerah penyelesaian untuk sistem pertidaksamaan (a) di atas, adalah sebagai berikut.

Gambar 2.9: Daerah penyelesaian yang memenuhi pertidaksamaan (a).

b. Daerah penyelesaian untuk sistem pertidaksamaan (b) di atas, adalah sebagai berikut:

Gambar 2.10: Tidak ada daerah penyelesaian yang memenuhi pertidaksamaan b)

Jadi, tidak ada nilai x dan y yang memenuhi sistem pertidaksamaan b). Hal ini, perlu dicatat, bahwa tidak semua masalah memiliki penyelesaian.

Uji Kompetensi 2.1

1. Tanpa menggambarkan grafik, tentukan himpunan penyelesaian (jika ada) setiap pertidaksamaan di bawah ini.

   a. $2x - 9y \geq \frac{1}{2}$

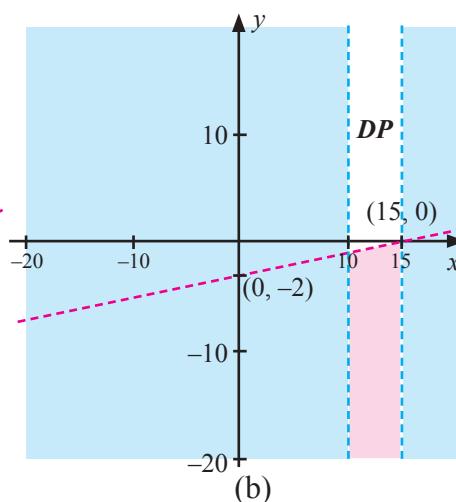
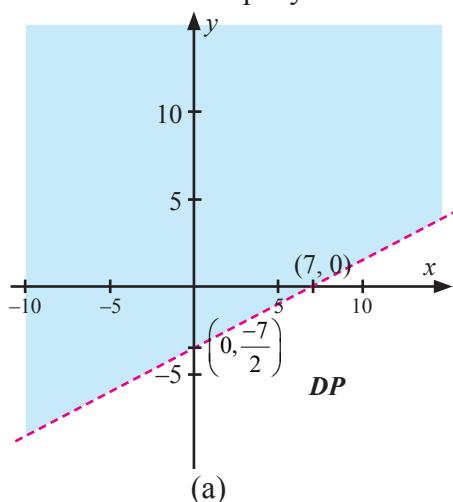
   b. $x - 6y \geq 0$

   c. $\frac{2x}{y} \geq \frac{5}{4}$

   d. $\frac{x + 3y}{3} \geq \frac{4x + 2y}{2}$

   e. $\frac{5x - 4y}{5} \geq \frac{2x - \frac{8y}{5}}{2}$

   f. $ax + by \geq c$, a, b, c, bilangan positif

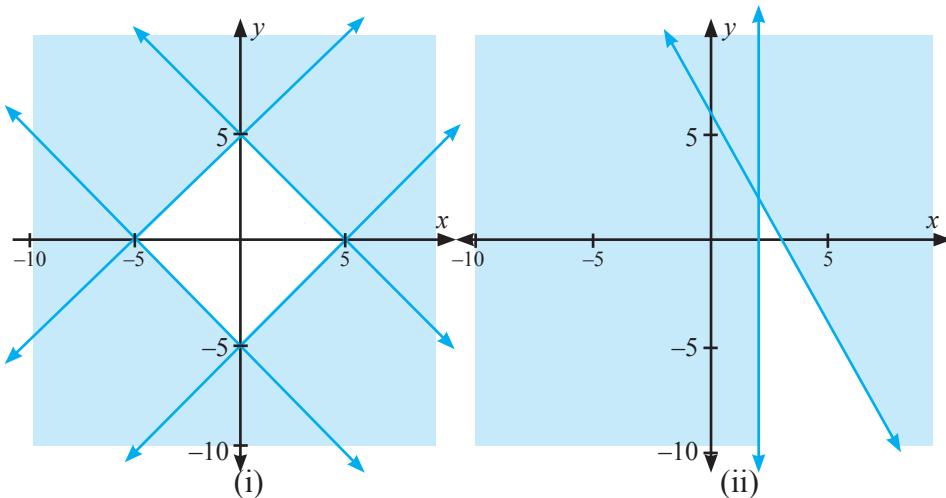
2. Untuk soal No.1, gambarkan setiap pertidaksamaan untuk menentukan daerah penyelesaian (jika ada).
3. Untuk setiap grafik di bawah ini, tentukan pertidaksamaan yang tepat memenuhi daerah penyelesaian.

4. PT Lasin adalah suatu pengembang perumahan di daerah pemukiman baru. PT tersebut memiliki tanah seluas 12.000 meter persegi berencana akan membangun dua tipe rumah, yaitu tipe mawar dengan luas 130 meter persegi dan tipe melati dengan luas 90 m^2. Jumlah rumah yang akan dibangun tidak lebih 150 unit. Pengembang merancang laba tiap-tiap tipe rumah Rp2.000.000,00 dan Rp1.500.000,00.

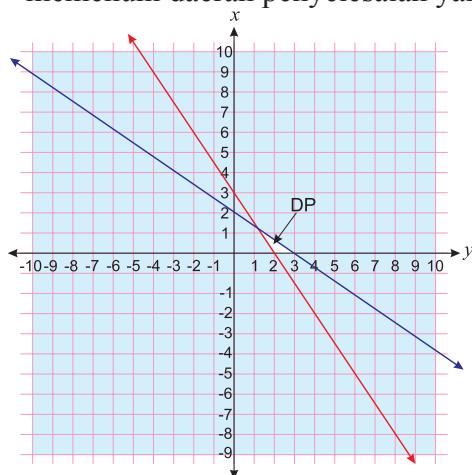
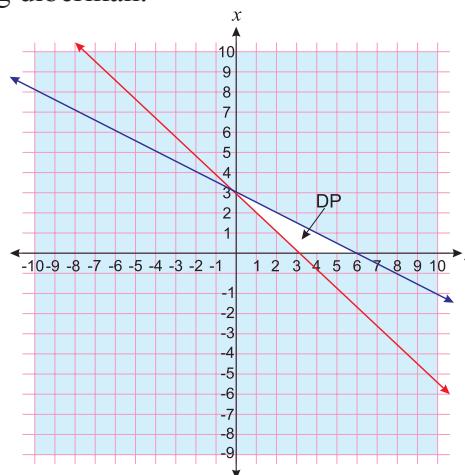
Modelkan permasalahan di atas! Kemudian gambarkan daerah penyelesaian untuk sistem pertidaksamaannya.

5. Gambarkan daerah penyelesaian setiap sistem pertidaksamaan di bawah ini.

   a) $2x + y \geq 24$
      $x \geq 5$

   b) $2y \leq 5 - 6x$
      $1 \leq y \leq 6$

6. Perhatikan grafik-grafik di bawah ini.
   Nyatakan pertidaksamaan-pertidaksamaan yang memenuhi setiap daerah yang memenuhi.

7. Seorang atlet diwajibkan makan dua jenis tablet setiap hari. Tablet pertama mengandung 5 unit vitamin A dan 3 unit vitamin B, sedangkan tablet kedua mengandung 10 unit vitamin A dan 1 unit vitamin B. Dalam satu hari, atlet itu memerlukan 20 unit vitamin A dan 5 unit vitamin B. Harga tiap-tiap 1 tablet, Rp1.500,00 dan Rp2.000,00.
   Modelkan masalah di atas. Kemudian gambarkan grafik model matematika-nya untuk menemukan daerah penyelesaian.

8. Untuk setiap grafik di bawah ini, tentukan sistem pertidaksamaan yang memenuhi daerah penyelesaian yang diberikan.

(i) (ii)

9. Sebuah toko bunga menjual 2 macam rangkaian bunga. Rangkaian I memerlukan 10 tangkai bunga mawar dan 15 tangkai bunga anyelir, Rangkaian II memerlukan 20 tangkai bunga mawar dan 5 tangkai bunga anyelir. Persediaan bunga mawar dan bunga anyelir masing-masing 200 tangkai dan 100 tangkai. Rangkaian I dijual seharga Rp 200.000,00 dan Rangkaian II dijual seharga Rp100.000,00 per rangkaian.
   Modelkan masalah di atas dalam bentuk model matematika. Kemudian gambarkan grafik model matematikanya.

10. Perhatikan masalah yang dihadapi seorang penjaja buah-buahan berikuti ini.
    Pak Benni, seorang penjaja buah-buahan yang menggunakan gerobak menjual apel dan pisang. Harga pembelian apel Rp18.000,00 tiap kilogram dan pisang Rp8.000,00 tiap kilogram. Beliau hanya memiliki modal Rp2.000.000,00 sedangkan muatan gerobak tidak lebih dari 450 kilogram. Padahal keuntungan tiap kilogram apel 2 kali keuntungan tiap kilogram pisang.
    Tentukan tiga titik yang terdapat pada grafik daerah penyelesaian masalah ini.

2.3 Menentukan Nilai Optimum dengan Garis Selidik (Nilai Maksimum atau Nilai Minimum)

Untuk menyelesaikan masalah program linear dua variabel, dengan metode grafik akan dapat ditentukan himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaannya. Setelah kita sudah memahami menggambarkan daerah penyelesaian suatu sistem pertidaksamaan, kita tinggal memahami bagaimana cara menentukan nilai fungsi tujuan di daerah penyelesaian.

Nilai suatu fungsi sasaran ada dua kemungkinan, yaitu bernilai maksimum atau minimum. Istilah nilai minimum atau nilai maksimum, disebut juga nilai optimum atau nilai ekstrim. Jadi, pembahasan kita selanjutnya bagaimana konsep menentukan nilai optimum suatu fungsi tujuan dari suatu masalah program linear.

Mari kita cermati kajian berikut ini.

Masalah 2.6

Suatu pabrik farmasi menghasilkan dua jenis kapsul obat flu yang diberi nama Fluin dan Fluon. Tiap-tiap kapsul memuat tiga unsur (ingredient) utama dengan kadar kandungannya tertera dalam Tabel 2.6. Menurut dokter, seseorang yang sakit flu akan sembuh jika dalam tiga hari (secara rata-rata) minimal menelan 12 grain aspirin, 74 grain bikarbonat dan 24 grain kodein. Jika harga Fluin Rp500,00 dan Fluon Rp600,00 per kapsul, bagaimana rencana (program) pembelian seorang pasien flu (artinya berapa kapsul Fluin dan berapa kapsul Fluon harus dibeli) supaya cukup untuk menyembuhkannya dan meminimumkan ongkos pembelian total?

Table 2.6: Kandungan Unsur (dalam grain)

Unsur	Banyak grain perkapsul	
	Fluin	Fluon
Aspirin	2	1
Bikorbonat	5	8
Kodein	1	6

Alternatif Penyelesaian:

Data pada masalah di atas, dapat disajikan seperti tabel berikut ini.

Tabel 2.7: Tabel persiapan

Unsur	Fluin	Fluon	Batas Minimum
Aspirin	2	1	12
Bikarbonat	5	8	74
Kodein	1	6	24
Harga	500	600	

Dengan tabel tersebut, dapat kita misalkan:
x : banyak kapsul Fluin yang dibeli
y : banyak kapsul Fluon yang dibeli.

Selanjutnya, kita dengan mudah menemukan bentuk masalah program linear masalah di atas.

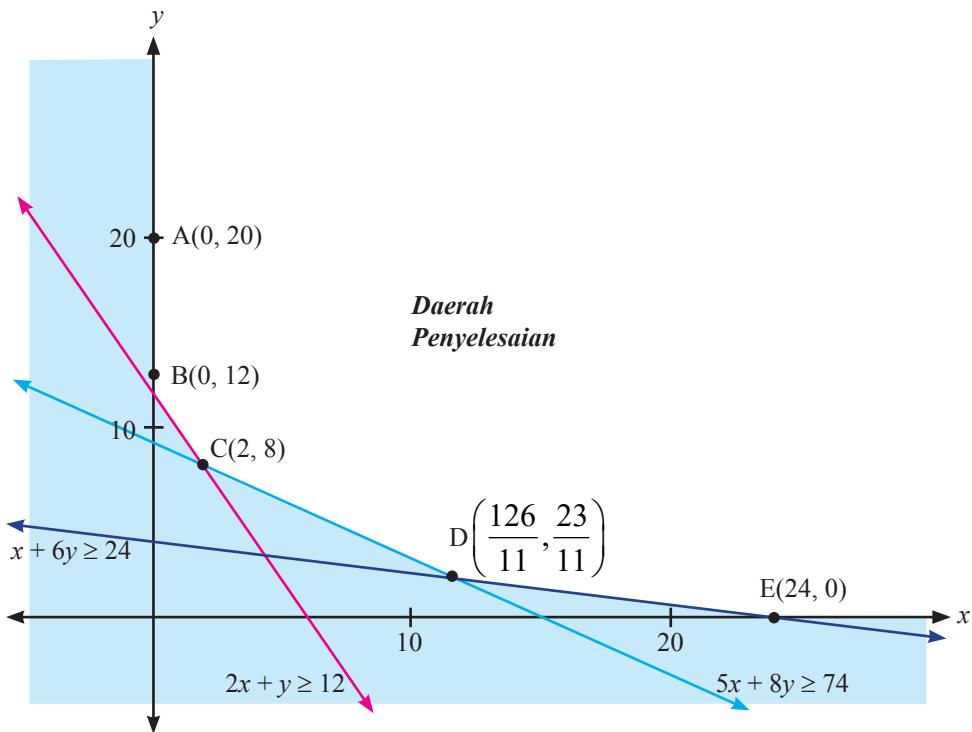
Mencari x, y yang memenuhi:

$$\begin{cases} 2x + y \geq 12 \\ 5x + 8y \geq 74 \\ x + 6y \geq 24 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad \text{(a)}$$

dan meminimumkan $Z(x, y) = 5x + 6y$ (dalam ratusan rupiah). (b)

Sebelum kita menentukan nilai minimum fungsi $Z(x, y)$, terlebih dahulu kita gambarkan grafik sistem pertidaksamaan (a), untuk menemukan daerah penyelesaian.

Informasi

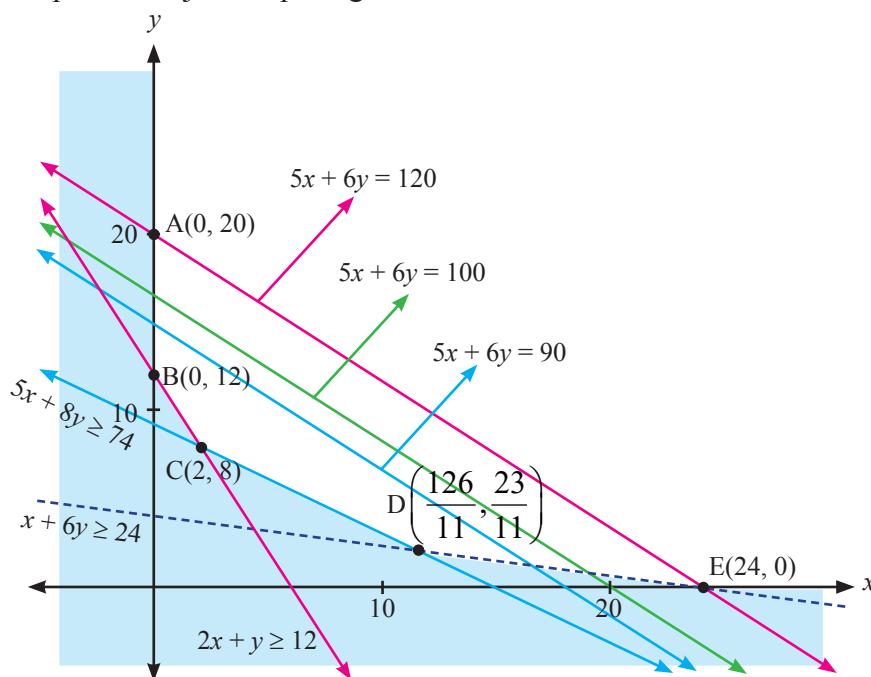
Software Autograph merupakan salah satu *software* yang digunakan untuk menggambarkan daerah penyelesaian suatu sistem pertidaksamaan linear. *Autograph* juga dapat digunakan untuk menggambarkan berbagai grafik fungsi, misalnya fungsi kuadrat dan fungsi logaritma.

Gambar 2.11: Daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan (a)

Daerah penyelesaian sistem (a) berupa suatu area tak terbatas (*unbounded area*). Untuk menentukan nilai minimum fungsi $Z(x, y) = 5x + 6y$ (dalam ratusan rupiah), artinya kita harus menemukan satu titik (dari tak hingga banyak titik yang terdapat pada daerah penyelesaian) sedemikian sehingga menjadikan nilai fungsi menjadi yang terkecil di antara yang lain.

Untuk menemukan koordinat titik A hingga E, kamu sudah mempelajari pada saat SMP dan SMA kelas X. Tentunya, jika kita memeriksa nilai fungsi $Z(x, y) = 5x + 6y$ pada kelima titik itu, bukanlah sesuatu hal yang salah, bukan? Hasilnya disajikan pada tabel berikut.

Tabel 2.8: Nilai fungsi $Z(x, y) = 5x + 6y$ (dalam ratus rupiah) pada lima titik sudut daerah penyelesaian

	$A(0, 20)$	$B(0, 12)$	$C(2, 8)$	$D\left(\frac{126}{11}, \frac{23}{11}\right)$	$E(24, 0)$
$Z(x, y) = 5x + 6y$	12.000	7.200	5.800	6.981,8	12.000

Menurut Tabel 2.8, nilai minimum fungsi adalah $Z(x, y) = 5x + 6y$ adalah 5.800, dan titik yang membuat fungsi tujuan bernilai minimum adalah titik $C(2, 8)$. Pertanyaannya, apakah ini nilai minimum fungsi di daerah penyelesaian? Untuk memastikannya, kita selidiki nilai fungsi $Z(x, y) = 5x + 6y$ pada daerah penyelesaian, dengan cara menggeser (ke kiri atau ke kanan; ke atas atau ke bawah). Kita namakan garis $k = 5x + 6y$ sebagai garis selidik, untuk k bilangan real. Seperti ditunjukkan pada gambar berikut ini.

Gambar 2.12: Nilai garis selidik $Z(x, y) = 5x + 6y$ pada daerah penyelesaian

Misalnya, kita pilih 3 titik yang terdapat pada daerah penyelesaian, yaitu titik $P(6, 10)$, $Q(8, 10)$, dan $R(12, 10)$, sedemikian sehingga terbentuk garis $5x + 6y = 90$, $5x + 6y = 100$, dan $5x + 6y = 120$, seperti yang disajikan pada Gambar 2.12.

Karena kita ingin menentukan nilai minimum fungsi, maka garis = $5x + 6y = 90$ digeser ke bawah hingga ditemukan nilai minimum fungsi, yaitu 5.800, pada titik (2, 8).

Jadi, agar seorang pasien flu sembuh, harus mengkomsumsi 2 kapsul fluin dan 8 kapsul fluon dengan biaya Rp5.800,00.

Untuk membantu kamu semakin memahami penentuan nilai optimum suatu fungsi tujuan dengan garis selidik, mari kita selesaikan masalah kelompok tani transmigran (Masalah 2.4)

Contoh 2.3

Telah dibentuk model matematika masalah tersebut, yaitu

$$\begin{cases} 0{,}02x + 0{,}05y \leq 10 \\ 10x + 8y \leq 1.550 \\ 5x + 3y \leq 460 \end{cases} \quad \text{atau} \quad \begin{cases} 2x + 5y \leq 1.000 & \rightarrow \text{kendala lahan} \\ 10x + 8y \leq 1.550 & \rightarrow \text{kendala waktu} \\ 5x + 3y \leq 460 & \rightarrow \text{kendala pupuk} \end{cases} \quad (3^*)$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

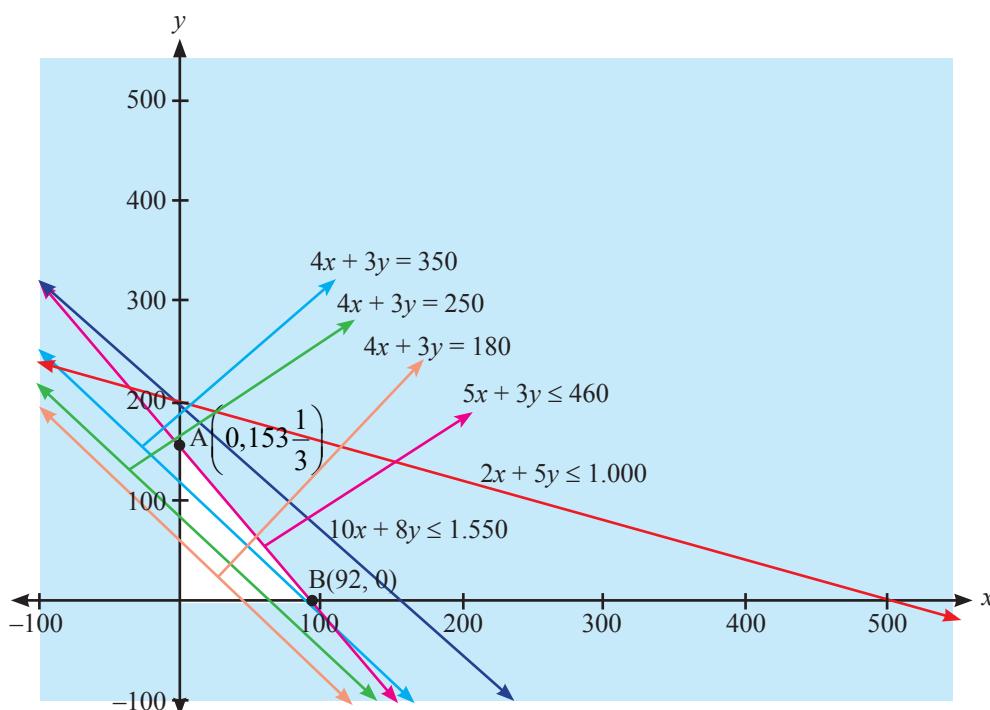
Fungi Tujuan

Maksimumkan: $Z(x, y) = 4x + 3y$ (dalam puluh ribu rupiah). (4*)

Kita akan menentukan banyak hektar tanah yang seharusnya ditanami padi dan jagung agar pendapatan kelompok tani tersebut maksimum.

Alternatif Penyelesaian:

Pada pembahasan Masalah 2.4, kita sudah menggambarkan daerah penyelesaian sistem (3*). Mari kita cermati lagi gambar tersebut.

Kita sudah menempatkan garis selidik $4x + 3y = k$ pada daerah penyelesaian-nya.

Gambar 2.13: Daerah penyelesaian yang memenuhi pertidaksamaan (3*).

Misalnya kita pilih 3 titik yang terdapat pada daerah penyelesaian, misalnya A(30, 20), B(80, 10), dan C(40, 30), sedemikian sehingga terbentuk garis $4x + 3y = 180$, $4x + 3y = 250$, dan $4x + 3y = 350$, seperti yang disajikan pada Gambar 2.13. Karena kita ingin menentukan nilai maksimum fungsi tujuan, maka garis $4x + 3y = 350$ digeser ke atas hingga ditemukan nilai maksimum fungsi, yaitu 460 di titik $\left(0,153\frac{1}{3}\right)$.

Jadi, untuk memaksimumkan pendapatan, petani harus memproduksi $153\frac{1}{3}$ kuintal jagung tidak perlu memproduksi padi. Dengan demikian petani memperoleh pendapatan maksimalnya sebesar Rp460.000,00.

Bandingkan masalah berikut ini dengan Masalah 2.6

Masalah 2.7

Apakah kamu pernah melihat tanaman hias seperti di bawah ini? Tahukah kamu berapa harga satu tanaman hias tersebut?

Gambar 2.14: Tanaman Hias Aglaonema dan Sansevieria
Sumber: www.aksesdunia.com

Setiap enam bulan, seorang pemilik usaha tanaman hias memesan tanaman hias dari agen besar; Aglaonema (A) dan Sansevieria (S) yang berturut-turut memberi laba sebesar Rp5.000.000,00 dan Rp3.500.000,00 per unit yang terjual. Dibutuhkan waktu yang cukup lama untuk menghasilkan satu tanaman hias dengan kualitas super. Oleh karena itu agen besar memiliki aturan bahwa setiap pemesanan tanaman hias A paling sedikit 20% dari seluruh pesanan tanaman hias lain. Pemilik usaha tanaman hias memiliki lahan yang hanya cukup untuk 10 tanaman hias A saja atau 15 tanaman hias S. Dalam keadaan demikian, berapa banyak tanaman hias A dan S sebaiknya dipesan (per semester) jika diketahui bahwa pada akhir semester tanaman hias lama pasti habis terjual dan pemilik usaha tersebut ingin memaksimumkan laba total?

Alternatif Penyelesaian:

Untuk memudahkan kita dalam membahas masalah ini,

misalkan x : banyak tanaman hias A yang dipesan

y : banyak tanaman hias S yang dipesan.

Pernyataan "Oleh karena itu agen besar memiliki aturan bahwa setiap pemesanan tanaman hias A paling sedikit 20% dari seluruh pesanan tanaman hias lain", dapat dituliskan sebagai berikut.

$$x \geq \frac{1}{5}(x+y) \text{ atau } 4x - y \geq 0.$$

Untuk memperoleh laba, pemilik harus mempertimbangan keterbatasan lahan sebagai daya tampung untuk tiap-tiap tanaman hias.

Misal, L : luas kebun tanaman hias,
L_x : luas kebun yang diperlukan untuk 1 tanaman hias A,
L_y : luas kebun yang diperlukan untuk 1 tanaman hias S.

Sesuai keterangan pada masalah di atas, luas kebun hanya dapat menampung 10 tanaman hias A atau 15 tanaman hias S. Pernyataan ini, dimodelkan sebagai berikut:

$$L_x = \frac{1}{10}L \text{ dan } L_y = \frac{1}{15}L$$

Tentu luas kebun yang diperlukan untuk x banyak tananam hias A dan y banyak tanaman hias S tidak melebihi luas kebun yang ada. Oleh karena itu, dapat dituliskan;

$x.\left(\frac{1}{10}L\right) + y.\left(\frac{1}{15}L\right) \leq L$ atau $3x + 2y \leq 30$.

Selanjutnya, pemilik kebun mengharapkan laba sebesar Rp5.000.000,00 dari 1 tanaman hias A yang terjual dan Rp3.500.000,00 dari 1 tanaman hias S yang terjual. Oleh karena itu, untuk sebanyak x tanaman hias A yang terjual dan sebanyak y tanaman hias S yang terjual, maka dapat dituliskan sebagai laba total pemilik kebun, yaitu:

$$Z = 5x + 3{,}5y \text{ (dalam juta rupiah).}$$

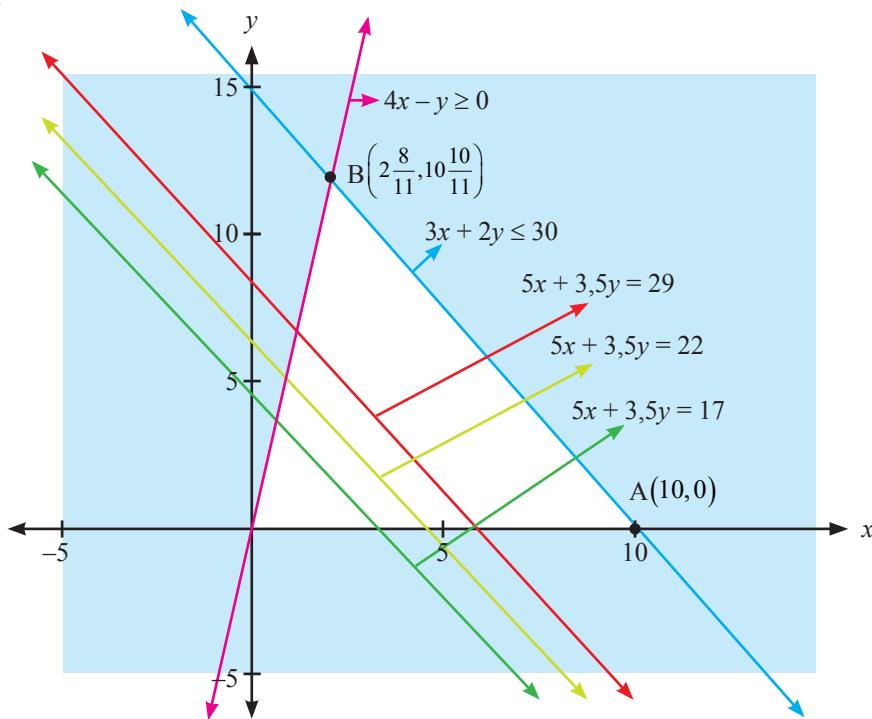
Jadi secara lengkap, model matematika masalah program linear pemilik kebun tanaman hias dinyatakan sebagai berikut.

Menentukan x dan y yang memenuhi kendala:

$$\begin{cases} 4x - y \geq 0 \\ 3x + 2y \leq 30 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

Dengan fungsi tujuan:
Maksimumkan: $Z = 5x + 3{,}5y$ (dalam juta rupiah).

Selanjutnya, kita akan menentukan daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan linear (1.1). Tentunya, diharapkan keterampilan kamu dalam menggambarkan daerah penyelesaian sistem tersebut sudah makin meningkat. Sekaligus juga, kamu harus makin terampil dalam memilih titik dalam daerah penyelesaian untuk menentukan nilai maksimum fungsi tujuan.

Adapun grafik daerah penyelesaian sistem (1.1) disajikan pada gambar berikut ini.

Gambar 2.15: Grafik daerah penyelesaian sistem (1.1)

Dengan mengambil tiga titik yang terdapat pada daerah penyelesaian, misalnya titik (2, 2), (3, 2), dan (3, 4), sehingga menghasilkan garis $5x + 3{,}5y = 17$, $5x + 3{,}5y = 22$, dan $5x + 3{,}5y = 29$, seperti yang disajikan pada Gambar 2.15. Untuk menentukan nilai maksimum fungsi $Z = 5x + 3{,}5y$, berarti kita menggeser garis $5x + 3{,}5y = 29$ ke atas, hingga ditemukan nilai maksimum, yaitu Z = 51.818.181,8181 atau sekitar Rp51.818.200,00 pada titik $B\left(2\frac{8}{11}, 10\frac{10}{11}\right)$.

Namun, pada kenyataannya, ditemukannya titik $B\left(2\frac{8}{11}, 10\frac{10}{11}\right)$ sebagai titik optimum masalah di atas mengakibatkan hal yang tidak mungkin terjadi untuk menemukan $2\frac{8}{11}$ tanaman hias A dan $10\frac{10}{11}$ tanaman hias S. Artinya, kita harus menemukan nilai x dan y (x, y bilangan bulat positif).

- Dalam kertas berpetak, di dalam daerah penyelesaian cermati titik-titik yang dekat dengan titik $B\left(2\frac{8}{11}, 10\frac{10}{11}\right)$. Tetapi titik yang kita inginkan, yaitu (x, y) harus untuk x dan y merupakan bilangan bulat positif.
- Bandingkan hasil yang kamu peroleh jika menggunakan konsep pembulatan bilangan untuk menentukan pembulatan titik $B\left(2\frac{8}{11}, 10\frac{10}{11}\right)$

Sebagai petunjuk buat kamu, nilai optimum fungsi sasaran adalah Rp50.000.000,00 dengan banyak tanaman hias A dan S, masing-masing 3 unit dan 10 unit.

Dari pembahasan Masalah 2.7 ini, ternyata metode garis selidik tidak akurat menemukan nilai optimum fungsi tujuan. Namun, pada umumnya, metode garis selidik dapat menemukan nilai maksimum atau nilai minimum suatu fungsi tujuan. Tetapi, kamu harus lebih kritis lagi dalam memecahkan masalah-masalah program linear yang mengharuskan penyelesaian berupa bilangan bulat positif.

Dari pembahasan Masalah 2.6, Masalah 2.7, dan Contoh 2.3, kita dapat mendefinisikan garis selidik, yaitu:

Definisi 2.4

Garis selidik adalah grafik persamaan fungsi sasaran/tujuan yang digunakan untuk menentukan solusi optimum (maksimum atau minimum) suatu masalah program linear.

Untuk menentukan persamaan garis selidik $k = C_1x_1 + C_2x_2$ dengan k bilangan real, kita memilih minimal dua titik (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) yang terdapat di daerah penyelesaian. Dengan dua titik tersebut, nilai optimum fungsi sasaran dapat ditemukan melalui pergeseran (ke atas atau ke bawah; ke kanan atau ke kiri) garis selidik di daerah penyelesaian.

Masalah 2.7 mengingatkan kita bahwa tidak selamanya penentuan nilai optimum dengan menggunakan garis selidik. Terdapat beberapa kasus yang memerlukan ketelitian yang tinggi dalam menyelesaikan masalah program linear.

2.4 Beberapa Kasus Daerah Penyelesaian

Dari beberapa masalah yang telah dibahas di atas, masalah program linear memiliki nilai optimum (maksimum atau minimum) terkait dengan eksistensi daerah penyelesaian. Oleh karena itu terdapat tiga kondisi yang akan kita selidiki, yaitu:

1) tidak memiliki daerah penyelesaian
2) memiliki daerah penyelesaian (fungsi tujuan hanya memiliki nilai maksimum atau hanya memiliki nilai minimum)
3) memiliki daerah penyelesaian (fungsi tujuan memiliki nilai maksimum dan minimum).

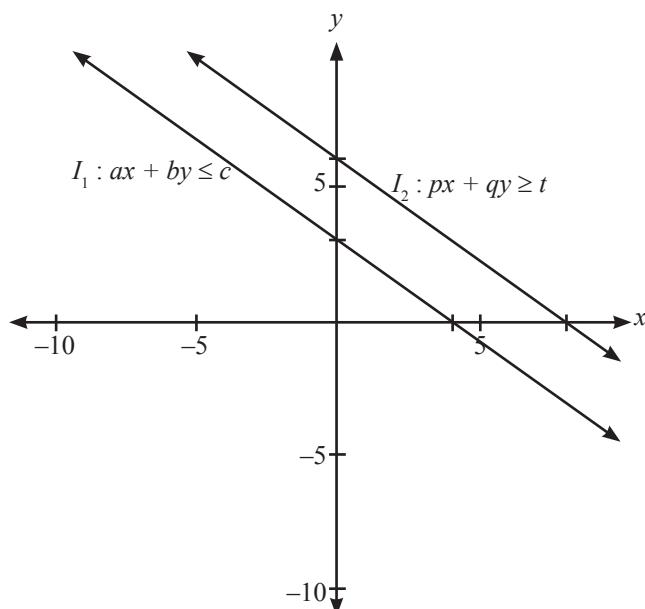
1) Tidak memiliki daerah penyelesaian

Mari kita cermati, Gambar 2.16

Diberikan sistem:

$$\begin{cases} ax + by \leq c;\ a \neq 0,\ b \neq 0 \\ px + qy \geq t;\ p \neq 0,\ q \neq 0 \end{cases}$$

Untuk setiap a, b, c, p, q, dan $t \in R$

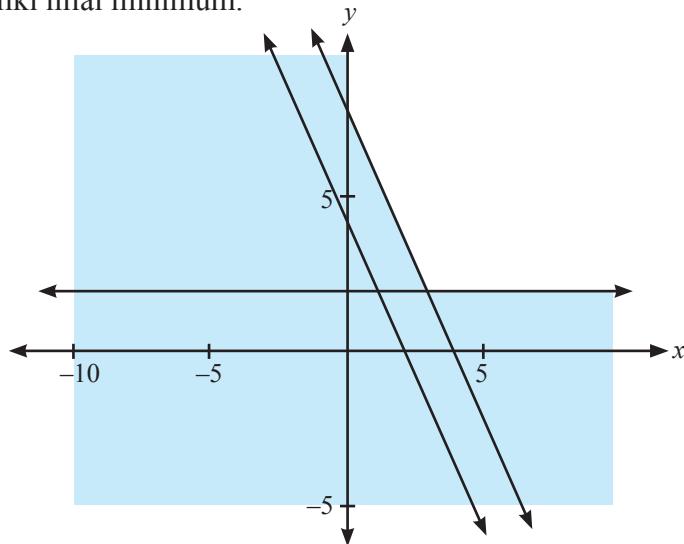
- Selidiki hubungan antar koefisien variabel x dan y serta konstanta c dan t pada sistem tersebut, hingga kamu menemukan syarat bahwa suatu sistem pertidaksamaan linear tidak memiliki daerah penyelesaian.

Gambar 2.16: Sistem pertidaksamaan yang tidak memiliki daerah penyelesaian.

2) Memiliki daerah penyelesaian (fungsi sasaran hanya memiliki nilai maksimum atau hanya memiliki nilai minimum)

Grafik berikut ini, mendeskripsikan bahwa walaupun kendala suatu program linear memiliki daerah penyelesaian, ternyata belum tentu memiliki nilai fungsi sasaran.

Mari kita cermati.

- Dari Gambar 2.17, tentukan sistem pertidaksamaan yang bersesuaian dengan grafik daerah penyelesaian seperti pada gambar.
  Selanjutnya, dengan sistem pertidaksamaan yang telah kamu temukan, misalnya diketahui fungsi tujuan;
  a. Maksimumkan:
     $Z(x, y) = mx + ny;\ m, n \in R^+$
  b. Minimumkan:
     $Z(x, y) = mx + ny;\ m, n \in R^+$
- Dengan demikian, tentu kamu dapat menemukan kondisi suatu program linear yang memiliki daerah penyelesaian tetapi fungsi tujuannya hanya memiliki nilai minimum dan tidak memiliki nilai maksimum (kenapa?).

- Rancang suatu sistem pertidaksamaan linear dua variabel, yang memiliki daerah penyelesaian tetapi fungsi tujuannya hanya memiliki nilai maksimum. Berikan penjelasan, kenapa fungsi tujuannya tidak memiliki nilai minimum.

Gambar 2.17: Grafik daerah penyelesaian suatu sistem pertidaksamaan.

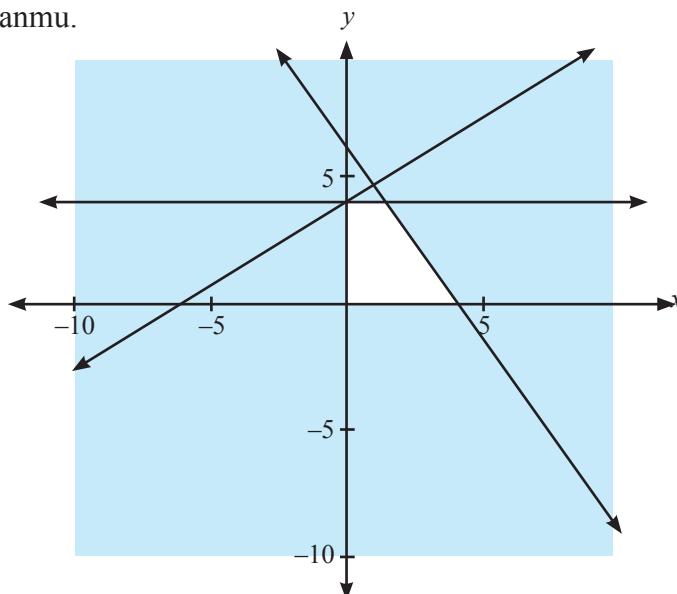
3) **Memiliki daerah penyelesaian (fungsi tujuan memiliki nilai maksimum dan minimum)**

Pertidaksamaan

$$\begin{cases} 2x - 3y + 12 \geq 0 \\ 3x + 2y - 12 \leq 0 \\ x \geq 0 \\ 0 \leq y \leq 4 \end{cases}$$

merupakan kendala yang bersesuaian dengan grafik daerah penyelesaian pada Gambar 2.18 berikut.

- Misalnya, diberikan fungsi sasaran berikut ini:
  a) Maksimumkan:
     $Z = 3x + 2y$
  b) Minimumkan:
     $Z = 3x + 2y$

Dengan teliti, coba kamu tentukan nilai maksimum dan minimum fungsi sasaran tersebut. Bandingkan hasil yang kamu temukan dengan temanmu.

Gambar 2.18: Grafik daerah penyelesaian yang terbatas.

Pertanyaan Kritis!!!

Diketahui sistem pertidaksamaan linear suatu masalah program linear.

$$\begin{cases} ax + by\,(\geq, \leq)\,c; a \neq 0, b \neq 0 & (1) \\ px + qy\,(\geq, \leq)\,t; p \neq 0, q \neq 0 & (2) \\ x \geq 0 & \\ y \geq 0 & \end{cases}$$

a, b, c, p, q, dan t merupakan bilangan real, dan $c < t$.

Selidiki syarat agar sistem pertidaksamaan linear tersebut:

i. tidak memiliki daerah penyelesaian;
ii. memiliki daerah penyelesaian;
iii. memiliki daerah penyelesaian berupa suatu garis atau segmen garis;
iv. memiliki daerah penyelesaian hanya satu titik.

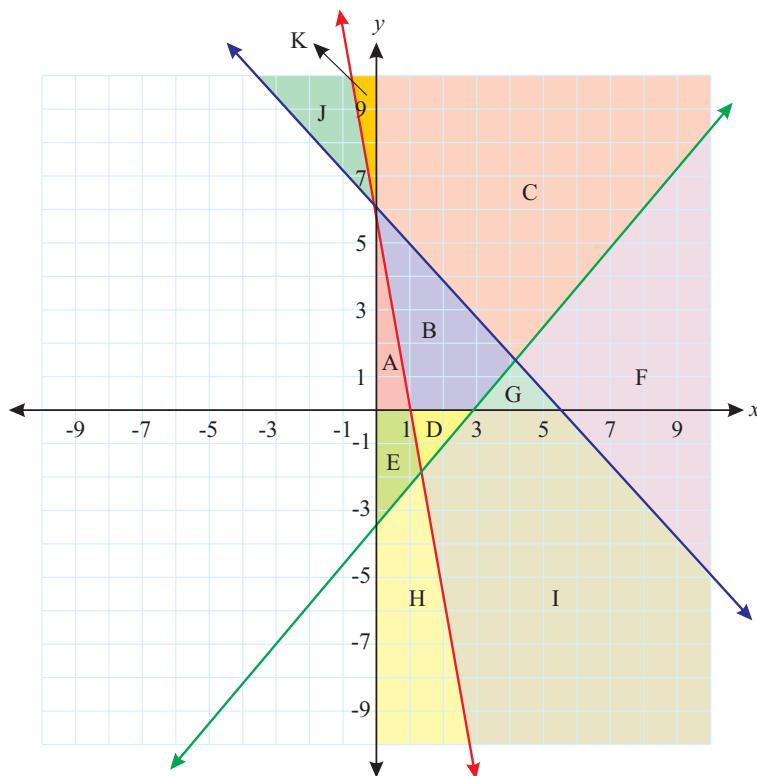
Uji Kompetensi 2.2

1. Rani dan Ratu menjalankan suatu bisnis kecil, mereka bekerja sama untuk menghasilkan blus dan rok. Untuk menyelesaikan 1 blus, Rani dan Ratu harus bekerja sama selama 1 jam. Untuk menyelesaikan 1 rok, Rani harus bekerja 1 jam dan Ratu harus bekerja 0,5 jam. Setiap hari, Ratu hanya mampu menyediakan 7 jam kerja, dan Ratu hanya 5 jam. Mereka hendak membuat blus dan rok yang sama banyaknya. Mereka mendapat keuntungan Rp80.000,00 untuk setiap blus dan Rp60.000,00 untuk setiap rok (Anggap semua blus dan rok habis terjual).
   a. Rancang model matematikanya.
   b. Berapa banyak blus dan rok yang selesaikan mereka? Berapa keuntungan maksimal yang mereka peroleh?

2. Suatu perusahaan transportasi harus mendistribusikan 1200 paket (yang besarnya sama) melalui dua truk pengangkut. Truk 1 memuat 200 paket untuk setiap pengangkutan dan truk 2 memuat 80 paket untuk setiap pengangkutan. Biaya pengangkutan untuk truk 1 dan truk 2 masing-masing Rp400.000,00 dan Rp200.000,00. Padahal biaya yang tersedia untuk mengangkut 1200 paket hanya Rp3.000.000,00. Hitunglah biaya minimal biaya pengangkutan paket tersebut.

3. Perusahaan "SABAR JAYA", suatu perusahaan jasa, memiliki 2 tipe karyawan. Karyawan tipe A digaji sebesar Rp135.000,00 per minggu dan karyawan tipe B digaji sebesar Rp270.000,00 per minggu. Pada suatu proyek memerlukan 110 karyawan, tetapi paling sedikit sebanyak 40 karyawan tipe B yang bekerja. Selain itu, untuk setiap proyek, aturan perusahaan mengharuskan banyak karyawan tipe B paling sedikit 0,5 dari banyak karyawan tipe A. Hitunglah banyak karyawan tipe A dan karyawan tipe B pada perusahaan tersebut.

4. Selesaikan Masalah 2.5.

5. Gambarkan daerah penyelesaian untuk setiap kendala masalah program linear berikut ini.
   a) $x - 4y \leq 0$; $x - y \leq 2$; $-2x + 3y \leq 6$; $x \leq 10$
   b) $x + 4y \leq 30$; $-5x + y \leq 5$; $6x - y \geq 0$; $5x + y \leq 50$; $x - 5y \leq 0$
   c) $x + 4y \leq 30$; $-5x + y \leq 5$; $6x - y \geq 0$; $5x + y \leq 50$; $x + 5y \leq 0$
6. Jika diberikan fungsi, hitung nilai maksimum dan nilai minimum fungsi (jika ada) untuk setiap sistem pertidaksamaan pada Soal No.5.
7. Perhatikan gambar di bawah ini.

   Tentukan sistem pertidaksamaan yang memenuhi jika setiap label daerah merupakan daerah penyelesaian.
8. Rancang suatu sistem pertidaksamaan yang memenuhi setiap daerah penyelesaian-penyelesaian berikut ini.
   a) berbentuk segitiga sama sisi di kuadran pertama
   b) berbentuk trapesium di kuadran kedua
   c) berbentuk jajargenjang di kuadran keempat

9. Pesawat penumpang mempunyai tempat duduk 48 kursi. Setiap penumpang kelas utama boleh membawa bagasi maksimum 60 kilogram sedangkan kelas ekonomi maksimum 20 kg. Pesawat hanya dapat membawa bagasi maksimum 1440 kg. Harga tiket kelas utama Rp 150.000,00 dan kelas ekonomi Rp100.000,00. Supaya pendapatan dari penjualan tiket pada saat pesawat penuh mencapai maksimum, tentukan jumlah tempat duduk kelas utama.
10. Cermati pertidaksamaan $ax + by \geq c$.
    Untuk menentukan daerah penyelesaian pada bidang koordinat, selain dengan menggunakan uji titik, selidiki hubungan tanda koefisien x dan y terhadap daerah penyelesaian (bersih) pertidaksamaan.
11. Tentukan titik yang mengakibatkan fungsi linear $f(x, y) = 2x - y - 4$ bernilai optimum (maksimum atau minimum) jika daerah asal dibatasi sebagai berikut $-1 \leq x \leq 1$; $-1 \leq y \leq 1$. (Periksa nilai fungsi di beberapa titik daerah asal dan periksa bahwa nilai optimum tercapai pada suatu titik sudut daerah asal).

Soal Proyek

Setiap manusia memiliki keterbatasan akan tenaga, waktu, dan tempat. Misalnya, dalam aktivitas belajar yang kamu lakukan setiap hari tentu kamu memiliki keterbatasan dengan waktu belajar di rumah, serta waktu yang kamu perlukan untuk membantu orang tuamu. Di sisi lain, kamu juga membutuhkan waktu yang cukup untuk istirahat setelah kamu melakukan aktivitas belajar dan aktivitas membantu orang tua.

Dengan kondisi tersebut, rumuskan model matematika untuk masalah waktu yang kamu perlukan setiap hari, hingga kamu dapat mengetahui waktu istirahat yang kamu peroleh setiap hari (minggu).

Selesaikan proyek di atas dalam waktu satu minggu.

Susun hasil kinerja dalam suatu laporan, sehingga kamu, temanmu, dan gurumu dapat memahami dengan jelas.

D. Penutup

Beberapa hal penting yang perlu dirangkum terkait dengan konsep program linear.

1. Konsep program linear didasari oleh konsep persamaan dan pertidaksamaan bilangan real, sehingga sifat-sifat persamaan linear dan pertidaksamaan linear dalam sistem bilangan real banyak digunakan sebagai pedoman dalam menyelesaikan suatu masalah program linear.
2. Model matematika merupakan cara untuk menyelesaikan masalah kontekstual. Pembentukan model tersebut dilandasi oleh konsep berpikir logis dan kemampuan bernalar keadaan masalah nyata ke bentuk matematika.
3. Dua atau lebih pertidaksamaan linear dua variabel dikatakan membentuk kendala program linear linear jika dan hanya jika variabel-variabelnya saling terkait dan variabel yang sama memiliki nilai yang sama sebagai penyelesaian setiap pertidaksamaan linear pada sistem tersebut. Sistem pertidaksamaan ini disebut sebagai kendala.
4. Fungsi tujuan/sasaran (fungsi objektif) merupakan tujuan suatu masalah program linear, yang juga terkait dengan sistem pertidaksamaan program linear.
5. Nilai-nilai variabel (x, y) disebut sebagai himpunan penyelesaian pada masalah suatu program linear jika nilai (x, y) memenuhi setiap pertidaksamaan yang terdapat pada kendala program linear.
6. Suatu fungsi objektif terdefinisi pada daerah penyelesaian suatu masalah program linear. Fungsi objektif memiliki nilai jika sistem kendala memiliki daerah penyelesaian atau irisan.
7. Konsep sistem pertidaksamaan dan persamaan linear berlaku juga untuk sistem kendala masalah program linear. Artinya jika sistem tersebut tidak memiliki solusi, maka fungsi sasaran tidak memiliki nilai.

8. Garis selidik merupakan salah satu cara untuk menentukan nilai objektif suatu fungsi sasaran masalah program linear dua variabel. Garis selidik ini merupakan persamaan garis fungi sasaran, $ax + by = k$, yang digeser di sepanjang daerah penyelesaian untuk menentukan nilai maksimum atau minimum suatu fungsi sasaran masalah program linear.

Penguasaan kamu tentang program linear akan memfasilitasi kamu untuk mampu menyelesaikan masalah-masalah dalam dunia ekonomi, kesehatan, dan bidang lainnya. Untuk masalah-masalah dalam kehidupan sehari-hari yang berbentuk *nonlinear* akan dikaji pada aplikasi turunan.

BAB 3

Matriks

A. Kompetensi Dasar dan Pengalaman Belajar

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
Setelah mengikuti pembelajaran matriks, siswa mampu: 3.3 Menjelaskan matriks dan kesamaan matriks dengan menggunakan masalah kontekstual dan melakukan operasi pada matriks yang meliputi penjumlahan, pengurangan, perkalian skalar, dan perkalian, serta transpose. 3.4 Menganalisis sifat-sifat determinan dan invers matriks berordo 2 × 2 dan 3 × 3. 4.3 Menyelesaikan masalah kontekstual yang berkaitan dengan matriks dan operasinya. 4.4 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan determinan dan invers matriks berordo 2 × 2 dan 3 × 3.	Melalui pembelajaran materi matriks, siswa memperoleh pengalaman belajar: 1. Melatih berpikir kritis dan kreatif. 2. Berkolaborasi, bekerja sama menyelesaikan masalah. 3. Berpikir independen mengajukan ide secara bebas dan terbuka. 4. Mengamati aturan susunan objek.

Istilah Penting

- Entry matriks
- Ordo matriks
- Operasi matriks
- Determinan matriks
- Invers matriks
- Identitas
- Transpose

B. Diagram Alir

Materi Prasyarat → Sistem Persamaan Linear

Sistem Persamaan Linear → Matriks

Masalah Autentik → Matriks → Unsur-Unsur Matriks

Matriks → Jenis Matriks, Relasi, Operasi, Matriks Kofaktor

Unsur-Unsur Matriks → Entry Baris, Entry Kolom

Jenis Matriks →
- Kolom
- Baris
- Persegi Panjang
- Persegi
- Segitiga
- Diagonal

Relasi → Kesamaan

Operasi →
- Penjumlahan
- Pengurangan
- Perkalian
- Transpose

Matriks Kofaktor → Matriks Adjoint → Invers Matriks

Entry Baris, Entry Kolom → Determinan → Invers Matriks

C. Materi Pembelajaran

3.1 Membangun Konsep Matriks

Coba kamu perhatikan susunan benda-benda di sekitar kamu! Sebagai contoh, susunan buku di meja, susunan buku di lemari, posisi siswa berbaris di lapangan, susunan keramik lantai, dan lain-lain.

Gambar 3.1. Susunan keramik/ubin di lantai

Tentu kamu dapat melihat susunan tersebut dapat berupa pola baris atau kolom, bukan? Bentuk susunan berupa baris dan kolom akan melahirkan konsep matriks yang akan kita pelajari. Sebagai contoh lainnya adalah susunan angka dalam bentuk tabel. Pada tabel terdapat baris atau kolom, banyak baris atau kolom bergantung pada ukuran tabel tersebut. Ini sudah merupakan gambaran dari sebuah matriks. Agar kamu dapat segera menemukan konsepnya, mari perhatikan beberapa gambaran dan permasalahan berikut ini!

Sebagai gambaran awal mengenai matriks, mari cermati uraian berikut. Diketahui harga tiket masuk suatu museum berikut ini.

Tabel 3.1: Harga Karcis

	Hari Minggu/Libur (Rp)	Hari Biasa (Rp)
Anak-anak Dewasa	5.000 15.000	3.000 10.000

Data tersebut, dapat disajikan kembali tanpa harus di dalam tabel seperti berikut:

$$\begin{bmatrix} 5.000 & 3.000 \\ 15.000 & 10.000 \end{bmatrix} \text{atau} \begin{pmatrix} 5.000 & 3.000 \\ 15.000 & 10.000 \end{pmatrix}$$

Bentuk penulisan tersebut, menunjukkan terdapat 2 baris dan dua kolom.

Masalah 3.1

Seorang wisatawan lokal hendak berlibur ke beberapa tempat wisata yang ada di Pulau Jawa. Untuk memaksimalkan waktu liburan, dia mencatat jarak antara kota-kota tersebut sebagai berikut.

Bandung – Semarang 367 km
Semarang – Yogyakarta 115 km
Bandung – Yogyakarta 428 km

Dapatkah kamu membuat susunan jarak antar kota tujuan wisata tersebut jika wisatawan tersebut memulai perjalanannya dari Bandung! Kemudian berikan makna setiap angka dalam susunan tersebut.

Alternatif Penyelesaian:

Wisatawan akan memulai perjalanannya dari Bandung ke kota-kota wisata di Pulau Jawa. Jarak antarkota tujuan wisata dituliskan sebagai berikut.

Tabel 3.2: Jarak Antarkota

	Bandung	Semarang	Yogyakarta
Bandung	0	367	428
Semarang	367	0	115
Yogyakarta	428	115	0

Berdasarkan tampilan di atas, dapat dilihat jarak antarkota tujuan wisata dengan membaca data dari baris ke kolom. Susunan tersebut dapat juga dituliskan sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} 0 & 367 & 428 \\ 367 & 0 & 115 \\ 428 & 115 & 0 \end{bmatrix}$$

Susunan jarak antarkota di Pulau Jawa ini terdiri dari 3 baris dan 3 kolom.

Kegiatan 3.1

Agar lebih memahami matriks mari lakukan kegiatan berikut ini.

1. Bentuklah kelompok yang masing-masing beranggotakan 3-4 orang.
2. Wawancaralah setiap anggota kelompok untuk mendapatkan informasi nilai siswa terhadap tiga mata pelajaran yang diminatinya.
3. Sajikan data yang diperoleh dalam bentuk tabel seperti di bawah ini.
4. Sajikan pula data tersebut dalam bentuk matriks dan jelaskan.

Nilai siswa / Nama Siswa	Pelajaran X	Pelajaran Y	Pelajaran Z
Siswa A	…..	…..	…..
Siswa B	…..	…..	…..
Siswa C	…..	…..	…..

Definisi 3.1

Matriks adalah susunan bilangan yang diatur menurut aturan baris dan kolom dalam suatu jajaran berbentuk persegi atau persegi panjang. Susunan bilangan itu diletakkan di dalam kurung biasa "( )" atau kurung siku "[ ]".

Matriks diberi nama dengan menggunakan huruf kapital, seperti A, B, C, dan lain-lain. Selain memiliki baris dan kolom, matriks juga memiliki entry yaitu setiap anggota dalam matriks tersebut. Entry suatu matriks dinotasikan dengan huruf kecil seperti a, b, c, ... dan biasanya disesuaikan dengan nama matriksnya.

Masalah 3.2

Manager supermarket ingin menata koleksi barang yang tersedia. Ubahlah bentuk susunan barang di supermarket di bawah ini menjadi matriks dan tentukan entry-entrynya.

KOLEKSI Susu 10 (Item)	KOLEKSI Roti dan Biskuit 20 (Item)	KOLEKSI Permen dan Cokelat 14 (Item)
KOLEKSI Sabun 18 (Item)	KOLEKSI Sampo dan Pasta Gigi 12 (Item)	KOLEKSI Detergen 8 (Item)
KOLEKSI Minyak Goreng 22 (Item)	KOLEKSI Beras dan Tepung 6 (Item)	KOLEKSI Bumbu 17 (Item)

Gambar 3.2: Susunan barang pada rak supermarket

Alternatif Penyelesaian:

Gambar di atas mendeskripsikan susunan barang-barang pada rak supermarket yang terdiri atas tiga baris dan tiga kolom. Bentuk matriks dari susunan barang tersebut dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 20 & 14 \\ 18 & 12 & 8 \\ 22 & 6 & 17 \end{bmatrix} \begin{matrix} \longrightarrow \text{Baris 1} \\ \longrightarrow \text{Baris 2} \\ \longrightarrow \text{Baris 3} \end{matrix}$$

Kolom 1, Kolom 2, Kolom 3

Misalkan pada matriks A di atas, entry-entrynya dinyatakan dengan a, dan umumnya entry-entry dari suatu matriks diberi tanda indeks, misalnya a_{ij} yang artinya entry dari matriks A yang terletak pada baris i dan kolom j. Maka koleksi susu yang terdapat pada baris ke-1, kolom ke-1 dapat dinyatakan a_{11} = 10. Koleksi barang yang terdapat pada baris ke-2, kolom ke-3 adalah koleksi detergen yang dinyatakan pula dengan a_{23} = 8 dan untuk selanjutnya entry matriks A dapat dinyatakan dengan:

- $a_{11} = 10$
- $a_{12} = 20$
- $a_{13} = 14$
- $a_{21} = 18$
- $a_{22} = 12$
- $a_{23} = 8$
- $a_{31} = 22$
- $a_{32} = 6$
- $a_{33} = 17$

Maka entry matriks A dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$A_{3\times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Secara induktif, entry matriks di atas dapat dibentuk menjadi:

a_{ij} : entry matriks pada baris ke-i dan kolom ke-j dengan, $i = 1, 2, 3, .., m$; dan $j = 1, 2, 3, \ldots, n$.

$m \times n$: menyatakan ordo matriks A dengan m adalah banyak baris dan n banyak kolom matriks A.

Contoh 3.1

Teguh, siswa kelas IX SMA Panca Budi, akan menyusun anggota keluarganya berdasarkan umur dalam bentuk matriks. Dia memiliki Ayah, dan Ibu, berturut-turut berumur 46 tahun dan 43 tahun. Selain itu dia juga memiliki kakak dan adik, secara berurut, Ningrum (22 tahun), Sekar (19 tahun), dan Wahyu (12 tahun). Dia sendiri berumur 14 tahun.

Berbekal dengan materi yang dia pelajari di sekolah dan kesungguhan dia dalam berlatih, dia mampu mengkreasikan susunan matriks yang merepresentasikan umur anggota keluarga Teguh sebagai berikut (berdasarkan urutan umur dalam keluarga Teguh).

i. Alternatif susunan I

$$T_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 46 & 43 & 22 \\ 19 & 14 & 12 \end{bmatrix}$$

Matriks $T_{2\times 3}$ adalah matriks persegi panjang dengan berordo 2×3.

ii. Alternatif susunan II

$$T_{3\times2} = \begin{bmatrix} 46 & 43 \\ 22 & 19 \\ 14 & 12 \end{bmatrix}$$

Matriks $T_{3\times2}$ adalah matriks persegi panjang berordo 3×2.

Dapatkah kamu menciptakan susunan matriks, minimal dua cara dengan cara yang berbeda? Kamu perlu memikirkan cara lain yang lebih kreatif!

3.2 Jenis-Jenis Matriks

Contoh 3.1 di atas menyajikan beberapa variasi ordo matriks yang merepresentasikan umur anggota keluarga Teguh. Secara detail, berikut ini akan disajikan jenis-jenis matriks.

a. Matriks Baris

Matriks baris adalah matriks yang terdiri atas satu baris saja. Biasanya, ordo matriks seperti ini adalah $1 \times n$, dengan n banyak kolom pada matriks tersebut.

$T_{1\times2} = [46 \;\; 43]$, matriks baris berordo 1×2 yang merepresentasikan umur orang tua Teguh.

$T_{1\times4} = [22 \;\; 19 \;\; 14 \;\; 12]$, matriks baris berordo 1×4 yang merepresentasikan umur Teguh dan saudaranya.

b. Matriks Kolom

Matriks kolom adalah matriks yang terdiri atas satu kolom saja. Matriks kolom berordo $m \times 1$, dengan m banyak baris pada matriks tersebut. Perhatikan matriks kolom berikut ini!

$T_{3\times1} = \begin{bmatrix} 43 \\ 22 \\ 19 \end{bmatrix}$, matriks kolom berordo 3×1 yang merepresentasikan umur semua wanita pada keluarga Teguh.

$$T_{5\times1} = \begin{bmatrix} 46 \\ 43 \\ 22 \\ 19 \\ 12 \end{bmatrix}$$, matriks kolom berordo 5 × 1 yang merepresentasikan umur kedua orang tua Teguh dan ketiga saudaranya.

c. Matriks Persegi Panjang

Matriks persegi panjang adalah matriks yang banyak barisnya tidak sama dengan banyak kolomnya. Matriks seperti ini memiliki ordo $m \times n$.

$$T_{2\times3} = \begin{bmatrix} 46 & 43 & 22 \\ 19 & 14 & 12 \end{bmatrix}$$, matriks persegi panjang berordo 2 × 3 yang merepresentasikan umur anggota keluarga Teguh.

$$T_{3\times2} = \begin{bmatrix} 46 & 43 \\ 22 & 19 \\ 14 & 12 \end{bmatrix}$$, matriks persegi panjang berordo 3 × 2 yang merepresentasikan umur semua anggota keluarga Teguh.

d. Matriks Persegi

Matriks persegi adalah matriks yang mempunyai banyak baris dan kolom sama. Matriks ini memiliki ordo $n \times n$.

$$T_{2\times2} = \begin{bmatrix} 46 & 43 \\ 22 & 19 \end{bmatrix}$$, matriks persegi berordo 2 × 2 yang merepresentasikan umur orang tua Teguh dan kedua kakaknya.

Tinjaulah matriks persegi berordo 4 × 4 di bawah ini.

$$H_{4\times4} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Diagonal Samping matriks *H*

Diagonal Utama matriks *H*

Diagonal utama suatu matrik adalah semua entry matriks yang terletak pada garis diagonal dari sudut kiri atas ke sudut kanan bawah. Diagonal samping matriks adalah semua entry matriks yang terletak pada garis diagonal dari sudut kiri bawah ke sudut kanan atas.

e. Matriks Segitiga

Mari kita perhatikan matriks F berordo 4 × 4. Terdapat pola susunan pada suatu matriks persegi, misalnya:

$$F = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 7 & 12 \\ 0 & 5 & -8 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 13 \end{bmatrix}$$

atau jika polanya seperti berikut ini.

$$G = \begin{bmatrix} 13 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 10 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Matriks persegi yang berpola seperti matriks F atau G disebut matriks segitiga.

Jadi, matriks segitiga merupakan suatu matriks persegi berordo $n \times n$ dengan entry-entry matriks di bawah atau di atas diagonal utama semuanya bernilai nol.

f. Matriks Diagonal

Dengan memperhatikan konsep pada matriks segitiga di atas, jika kita cermati kombinasi pola tersebut pada suatu matriks pesegi, seperti matriks berikut ini:

- $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$
- $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

- $C = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

maka matriks persegi dengan pola "semua entrynya bernilai nol, kecuali entry diagonal utama tidak semua nol" disebut matriks diagonal.

g. Matriks Identitas

Mari kita cermati kembali matriks persegi dengan pola seperti matriks berikut ini.

- $I_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- $I_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Cermati pola susunan angka 1 dan 0 pada ketiga matriks persegi di atas. Jika pola tersebut terdapat suatu matriks persegi, yaitu semua entry diagonal utama semua bernilai positif 1, disebut matriks identitas. Matriks identitas dinotasikan sebagai I berordo $n \times n$.

h. Matriks Nol

Jika entry suatu matriks semuanya bernilai nol, seperti berikut:

- $O_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, atau
- $O_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, atau
- $O_{1\times 3} = [0 \ \ 0 \ \ 0]$,

maka disebut matriks nol.

3.3 Kesamaan Dua Matriks

Perhatikan untuk matriks berikut ini.

a. $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 3 & 4+1 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{9} & 5 \\ 7 & 3^2 \end{bmatrix}$

Kedua matriks pada contoh a dan b adalah sama. Entry masing-masing matriks juga sama, bukan? Bagaimana dengan ordo kedua matriks? Dari kedua contoh di atas tampak bahwa entry-entry seletak dari kedua matriks yang berordo sama mempunyai nilai yang sama.
Nah bagaimana untuk matriks berikut ini?

$\begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}$

serta

$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Menurut kamu apakah matriks-matrik di atas sama? Apakah kedua matriks memiliki ordo yang sama? Apakah entry-entry seletak dari kedua matriks mempunyai nilai yang sama? Jika kalian telah memahami kasus di atas maka kita dapat menyatakan kesamaan matriks jika memenuhi sifat berikut ini.

Definisi 3.2

Matriks A dan matriks B dikatakan sama ($A = B$) jika dan hanya jika:

i. Ordo matriks A sama dengan ordo matriks B.

ii. Setiap entry yang seletak pada matriks A dan matriks B mempunyai nilai yang sama, $a_{ij} = b_{ij}$ (untuk semua nilai i dan j).

Untuk lebih mendalami kesamaan matrik mari perhatikan contoh berikut.

Contoh 3.2

Tentukanlah nilai a, b, c, dan d yang memenuhi matriks $P^t = Q$, dengan

$$P = \begin{bmatrix} 2a-4 & 3b \\ d+2a & 2c \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \text{ dan } Q = \begin{bmatrix} b-5 & 3a-c & 4 \\ 3 & 6 & 7 \end{bmatrix}.$$

Alternatif Penyelesaian:

Karena P merupakan matriks berordo 2×3, maka P^t merupakan matriks berordo 2×3. Matriks Q merupakan matriks berordo 2×3. Oleh karena itu berlaku kesamaan matriks $P^t = Q$.

Dengan $P^t = \begin{bmatrix} 2a-4 & d+2a & 4 \\ 3b & 2c & 7 \end{bmatrix}$. Akibatnya, kesamaan $P^t = Q$ dapat dituliskan:

$$\begin{bmatrix} 2a-4 & d+2a & 4 \\ 3b & 2c & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b-5 & 3a-c & 4 \\ 3 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

Dari kesamaan di atas, kita temukan nilai a, b, c, dan d sebagai berikut.

- $3b = 3$ maka $b = 1$, dan $2c = 6$ maka $c = 3$.
- $2a - 4 = -4$ maka $a = 0$.
- Karena $a = 0$ maka $d = -3$.

Jadi, $a = 0$, $b = 1$, $c = 3$, dan $d = -3$.

3.4 Operasi pada Matriks

3.4.1 Operasi Penjumlahan Matriks

Masalah 3.3

Toko kue berkonsep waralaba ingin mengembangkan usaha di dua kota yang berbeda. Manajer produksi ingin mendapatkan data biaya yang akan diperlukan. Biaya untuk masing-masing kue seperti pada tabel berikut.

Tabel Biaya Toko di Kota A (dalam Rupiah)

	Brownies	**Bika Ambon**
Bahan kue Juru masak/*Chef*	1.000.000 2.000.000	1.200.000 3.000.000

Tabel Biaya Toko di Kota B (dalam Rp)

	Brownies	**Bika Ambon**
Bahan kue Juru masak/*Chef*	1.500.000 3.000.000	1.700.000 3.500.000

Berapa total biaya yang diperlukan oleh kedua toko kue?

Alternatif Penyelesaian:

Jika kita misalkan matriks biaya di Kota A, sebagai matriks A dan matriks biaya di Kota B sebagai matriks B, maka matriks biaya kedua toko disajikan sebagai berikut.

$$A = \begin{pmatrix} 1.000.000 & 1.200.000 \\ 2.000.000 & 3.000.000 \end{pmatrix} \text{ dan } B = \begin{pmatrix} 1.500.000 & 1.700.000 \\ 3.000.000 & 3.500.000 \end{pmatrix}.$$

Total biaya yang dikeluarkan oleh untuk kedua toko kue tersebut dapat diperoleh sebagai berikut.

- Total biaya bahan untuk *brownies* = 1.000.000 + 1.500.000 = 2.500.000
- Total biaya bahan untuk bika ambon = 1.200.000 + 1.700.000 = 2.900.000

- Total biaya *chef* untuk *brownies* = 2.000.000 + 3.000.000 = 5.000.000
- Total biaya *chef* untuk bika ambon = 3.000.000 + 3.500.000 = 6.500.000

Keempat total biaya tersebut dinyatakan dalam matriks adalah sebagai berikut.

Total Biaya Untuk Kedua Toko (dalam Rupiah)

	Brownies	**Bika Ambon**
Bahan	2.500.000	2.900.000
Chef	5.000.000	6.500.000

Total biaya pada tabel di atas dapat ditentukan dengan menjumlahkan matriks A dan B.

$$A + B = \begin{pmatrix} 1.000.000 & 1.200.000 \\ 2.000.000 & 3.000.000 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1.500.000 & 1.700.000 \\ 3.000.000 & 3.500.000 \end{pmatrix}.$$

$$= \begin{pmatrix} 2.500.000 & 2.900.000 \\ 5.000.000 & 6.500.000 \end{pmatrix}$$

Penjumlahan kedua matriks biaya di atas dapat dioperasikan diakibatkan kedua matriks biaya memiliki ordo yang sama, yaitu 2×2. Seandainya ordo kedua matriks biaya tersebut berbeda, kita tidak dapat melakukan operasi penjumlahan terhadap kedua matriks.

Nah, melalui pembahasan di atas, tentunya dapat didefinisikan penjumlahan dua matriks dalam konteks matematis.

Definisi 3.3

Misalkan A dan B adalah matriks berordo $m \times n$ dengan entry-entry a_{ij} dan b_{ij}. Matriks C adalah jumlah matriks A dan matriks B, ditulis $C = A + B$, apabila matriks C juga berordo $m \times n$ dengan entry-entry ditentukan oleh:

$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ (untuk semua i dan j).

Catatan: *Dua matriks dapat dijumlahkan hanya jika memiliki ordo yang sama dan ordo matriks hasil penjumlahan dua matriks adalah sama dengan ordo matriks yang dijumlahkan.*

Perhatikan contoh-contoh berikut untuk lebih memahami penjumlahan matriks.

Contoh 3.3

a) Jika $P = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 8 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, maka

$$P + Q = \begin{bmatrix} 10+2 & 2+2 & 4+8 \\ 1+1 & 3+0 & 5+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

b) Jika diketahui matriks $P = \begin{bmatrix} x & 2 & 4 \\ 1 & x-7 & 5 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 8 \\ 1 & y & 1 \end{bmatrix}$, dan $P + Q = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$. Tentukan nilai x dan y!

Jika dimisalkan $R = P + Q$, maka hasil jumlah matriks P dan Q adalah R $= \begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$, sementara $P + Q = \begin{bmatrix} x+2 & 2+2 & 4+8 \\ 1+1 & x-7+y & 5+1 \end{bmatrix}$.

Berdasarkan sifat kesamaan dua matriks, maka diperoleh:

$$\begin{bmatrix} x+2 & 2+2 & 4+8 \\ 1+1 & x-7+y & 5+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$x + 2 = 12 \quad \Rightarrow x = 10$
$x - 7 + y = 3 \quad \Rightarrow 10 - 7 + y = 3$ atau $y = 0$
Maka diperoleh nilai x = 10 dan y = 0.

c) Diketahui matriks $T = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 5 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$. Mari kita tunjukkan bahwa $T + O = T$ dan $O + T = T$!

Matriks O dalam hal ini adalah matriks nol berordo 3 × 3, karena matriks tersebut akan dijumlahkan dengan matriks T berordo 3 × 3 juga.

- $$T + O = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 5 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 6+0 & 3+0 & 1+0 \\ 5+0 & 5+0 & 0+0 \\ 1+0 & 3+0 & 7+0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 5 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix} = T$$

- $$O + T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 5 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0+6 & 0+3 & 0+1 \\ 0+5 & 0+5 & 0+0 \\ 0+1 & 0+3 & 0+7 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 5 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix} = T$$

3.4.2 Operasi Pengurangan Matriks

Sebagai gambaran awal mengenai operasi pengurangan dua matriks, mari kita cermati contoh masalah berikut ini.

Masalah 3.4

Sebuah pabrik tekstil hendak menyusun tabel aktiva mesin dan penyusutan mesin selama 1 tahun yang dinilai sama dengan 10% dari harga perolehan sebagai berikut:

Jenis Aktiva	Harga Perolehan (Rp)	Penyusutan Tahun I (Rp)	Harga Baku (Rp)
Mesin A	25.000.000	2.500.000	
Mesin B	65.000.000	6.500.000	
Mesin C	48.000.000	4.800.000	

Lengkapilah tabel tersebut dengan menggunakan matriks!

Alternatif Penyelesaian:

Misalkan:

Harga perolehan merupakan matriks $A = \begin{bmatrix} 25.000.000 \\ 65.000.000 \\ 48.000.000 \end{bmatrix}$

Penyusutan tahun pertama merupakan matriks $B = \begin{bmatrix} 2.500.000 \\ 6.500.000 \\ 4.800.000 \end{bmatrix}$

Untuk mencari harga baku pada tabel tersebut adalah

$$A - B = \begin{bmatrix} 25.000.000 \\ 65.000.000 \\ 48.000.000 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2.500.000 \\ 6.500.000 \\ 4.800.000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22.500.000 \\ 58.500.000 \\ 43.500.000 \end{bmatrix}$$

Rumusan penjumlahan dua matriks di atas dapat kita terapkan untuk memahami konsep pengurangan matriks A dengan matriks B.

Misalkan A dan B adalah matriks-matriks berordo $m \times n$. Pengurangan matriks A dengan matriks B didefinisikan sebagai jumlah antara matriks A dengan matriks $-B$. Ingat, Matriks $-B$ adalah lawan dari matriks B. Ditulis:

$$A - B = A + (-B).$$

Matriks dalam kurung merupakan matriks yang entrynya berlawanan dengan setiap entry yang bersesuaian matriks B.

Contoh 3.4

Mari kita cermati contoh berikut ini.

a). Jika $K = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ dan $L = \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}$, maka

$$K - L = K + (-L) = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -9 \\ -7 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

b). Diketahui matriks-matriks X, Y dan Z sebagai berikut.

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \\ 9 & 11 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}, \text{ dan } Z = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 11 & 13 \\ 17 & 19 & 23 \end{bmatrix}$$

Jika ada, tentukan pengurangan-pengurangan matriks berikut ini.

i) $Y - X$ ii) $Y - Z$ iii) $X - Z$

Alternatif Penyelesaian:

Matriks X dan Y memiliki ordo yang sama, yaitu berordo 3×2, sedangkan matriks Z berordo 3×3. Oleh karena itu, menurut aturan pengurangan dua matriks, hanya bagian i) saja yang dapat ditentukan, ii) dan iii) tidak dapat dioperasikan, (kenapa)?

$$\text{Jadi, } Y - X = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -5 & -7 \\ -9 & -11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dari pemahaman contoh di atas, pengurangan dua matriks dapat juga dilakukan dengan mengurangkan langsung entry-entry yang seletak dari kedua matriks tersebut, seperti yang berlaku pada penjumlahan dua matriks, yaitu: $A - B = [a_{ij}] - [b_{ij}]$.

3.4.3 Operasi Perkalian Skalar pada Matriks

Dalam aljabar matriks, bilangan real k sering disebut sebagai skalar. Oleh karena itu perkalian real terhadap matriks juga disebut sebagai perkalian skalar dengan matriks.

Sebelumnya, pada kajian pengurangan dua matriks, $A - B = A + (-B)$, $(-B)$ dalam hal ini sebenarnya hasil kali bilangan -1 dengan semua entry matriks B. Artinya, matriks $(-B)$ dapat kita tulis sebagai:

$$-B = k.B, \text{ dengan } k = -1$$

Secara umum, perkalian skalar dengan matriks dirumuskan sebagai berikut.

Misalkan A adalah suatu matriks berordo $m \times n$ dengan entry-entry a_{ij} dan k adalah suatu bilangan real. Matriks C adalah hasil perkalian bilangan real k terhadap matriks A, dinotasikan $C = k.A$, bila matriks C berordo $m \times n$ dengan entry-entrynya ditentukan oleh:

$$c_{ij} = k.a_{ij} \text{ (untuk semua } i \text{ dan } j).$$

Contoh 3.5

a) Jika $H = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, maka $2.H = \begin{bmatrix} 2\times 2 & 2\times 3 \\ 2\times 4 & 2\times 5 \\ 2\times 1 & 2\times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 10 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

b) Jika $L = \begin{bmatrix} 12 & 30 & 15 \\ 0 & 24 & 18 \\ 3 & -3 & -12 \end{bmatrix}$, maka $\frac{1}{3}L = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\times 12 & \frac{1}{3}\times 30 & \frac{1}{3}\times 15 \\ \frac{1}{3}\times 0 & \frac{1}{3}\times 24 & \frac{1}{3}\times 18 \\ \frac{1}{3}\times 3 & \frac{1}{3}\times(-3) & \frac{1}{3}\times(-12) \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 10 & 5 \\ 0 & 8 & 6 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

c) Jika M = $\begin{bmatrix} 12 & 24 & 36 \\ 48 & 60 & 72 \end{bmatrix}$

$$\frac{1}{4}M + \frac{3}{4}M = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}\times 12 & \frac{1}{4}\times 24 & \frac{1}{4}\times 36 \\ \frac{1}{4}\times 48 & \frac{1}{4}\times 60 & \frac{1}{4}\times 72 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{4}\times 12 & \frac{3}{4}\times 24 & \frac{3}{4}\times 36 \\ \frac{3}{4}\times 48 & \frac{3}{4}\times 60 & \frac{3}{4}\times 72 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 12 & 15 & 18 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 18 & 27 \\ 36 & 45 & 54 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 24 & 36 \\ 48 & 60 & 72 \end{bmatrix} = M$$

Selanjutnya, untuk M suatu matriks berordo $m \times n$, p dan q bilangan real, tunjukkan bahwa $(p + q)M = p.M + q.M$.
Silakan diskusikan!

d) Diketahui matriks $P = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ dan $Q = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}$. Jika $c = -1$, maka

$$c.(P - Q) = -1.\left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}\right) = -1.\begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Di sisi lain, jika matriks P dan Q merupakan dua matriks berordo sama, dan c adalah bilangan real, maka $c.(P - Q) = c.P - c.Q$. Tentunya hasil $c.(P - Q)$ sama dengan $c.P - c.Q$. (Tunjukkan!)

e) Dengan menggunakan matriks $L = \begin{bmatrix} 12 & 30 & 10 \\ 0 & 24 & 18 \\ 6 & 8 & 16 \end{bmatrix}$, $p = 2$, dan $q = \frac{1}{2}$,

Kita dapat memahami bahwa:

$$q.L = -\begin{bmatrix} 12 & 30 & 10 \\ 0 & 24 & 18 \\ 6 & 8 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 15 & 5 \\ 0 & 12 & 9 \\ 3 & 4 & 8 \end{bmatrix}.$$

Jika kita mengalikan hasil p dengan $q.L$, maka kita akan peroleh:

$$p.(q.L) = 2.\begin{bmatrix} 6 & 15 & 5 \\ 0 & 12 & 9 \\ 3 & 4 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 30 & 10 \\ 0 & 24 & 18 \\ 6 & 8 & 16 \end{bmatrix}.$$

Karena p dan q adalah skalar, ternyata dengan mengalikan p dengan q terlebih dahulu, kemudian mengalikannya dengan matriks L, merupakan langkah lebih efektif untuk menyelesaikan $p.(q.L)$.

Sekarang, untuk matriks M berordo $m \times n$, p dan q adalah skalar anggota himpunan bilangan real, tolong kamu tunjukkan bahwa: $p \times (q \times L) = (p \times q) \times L$.

3.4.4 Operasi Perkalian Dua Matriks

Masalah 3.5

Suatu perusahaan yang bergerak pada bidang jasa akan membuka tiga cabang besar di pulau Sumatera, yaitu cabang 1 di kota Palembang, cabang 2 di kota Padang, dan cabang 3 di kota Pekanbaru. Untuk itu, diperlukan beberapa peralatan untuk membantu kelancaran usaha jasa tersebut, yaitu *handphone*, komputer, dan sepeda motor. Di sisi lain, pihak perusahaan mempertimbangkan harga per satuan peralatan tersebut. Lengkapnya, rincian data tersebut disajikan sebagai berikut.

	***Handphone* (unit)**	**Komputer (unit)**	**Sepeda Motor (unit)**
Cabang 1	7	8	3
Cabang 2	5	6	2
Cabang 3	4	5	2

Harga *Handphone* (juta)	2
Harga Komputer (juta)	5
Harga Sepeda Motor (juta)	15

Perusahaan ingin mengetahui total biaya pengadaan peralatan tersebut di setiap cabang.

Alternatif Penyelesaian:

Tidaklah sulit menyelesaikan persoalan di atas. Tentunya kamu dapat menjawabnya. Sekarang, kita akan menyelesaikan masalah tersebut dengan menggunakan konsep matriks.

Kita misalkan matriks $C_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 3 \\ 5 & 6 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ yang merepresentasikan jumlah unit setiap peralatan yang dibutuhkan di setiap cabang dan matriks $D_{3\times 1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 15 \end{bmatrix}$ yang merepresentasikan harga per unit setiap peralatan.

Untuk menentukan total biaya pengadaan peralatan tersebut di setiap cabang, kita peroleh sebagai berikut.

- Cabang 1
  Total biaya = (7 unit *handphone* × 2 juta) + (8 unit komputer × 5 juta) + (3 unit sepeda motor 15 juta).
  = Rp99.000.000,00
- Cabang 2
  Total biaya = (5 unit handphone × 2 juta) + (6 unit komputer × 5 juta) + (2 unit sepeda motor × 15 juta)
  = Rp70.000.000,00
- Cabang 3
  Total biaya = (4 unit handphone × 2 juta) + (5 unit komputer × 5 juta) + (2 unit sepeda motor × 15 juta)
  = Rp63.000.000,00

Jadi total biaya pengadaan peralatan di setiap unit dinyatakan dalam matriks berikut.

$$E_{3\times 1} = \begin{bmatrix} Rp99.000.000,00 \\ Rp70.000.000,00 \\ Rp63.000.000,00 \end{bmatrix}.$$

Dapat kita cermati dari perkalian di atas, bahwa setiap entry baris pada matriks C berkorespondensi satu-satu dengan setiap entry kolom pada matriks D. Seandainya terdapat satu saja entry baris ke-1 pada matriks C tidak memiliki pasangan dengan entry kolom ke-1 pada matriks D, maka operasi perkalian terhadap kedua matriks itu tidak dapat dilakukan. Jadi, dapat disimpulkan operasi perkalian terhadap dua matriks dapat dilakukan jika banyak baris pada matriks C sama dengan banyak kolom pada matriks D. Banyak perkalian akan berhenti jika setiap entry baris ke-n pada matriks C sudah dikalikan dengan setiap entry kolom ke-n pada matriks D.

Secara matematis, kita dapat menyatakan perkalian dua matriks sebagai berikut. Misalkan matriks $A_{m \times n}$ dan matriks $B_{n \times p}$, matriks A dapat dikalikan dengan matriks B jika banyak baris matriks A sama dengan banyak kolom matriks B. Hasil perkalian matriks A berordo $m \times n$ terhadap matriks B berordo $n \times p$ adalah suatu matriks berordo $m \times p$. Proses menentukan entry-entry hasil perkalian dua matriks dipaparkan sebagai berikut.

$$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \text{ dan } B_{n \times p} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2p} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix}$$

Jika C adalah matriks hasil perkalian matriks $A_{m \times n}$ terhadap matriks $B_{n \times p}$ dan dinotasikan $C = A.B$, maka

- Matriks C berordo $m \times p$.
- Entry-entry matriks C pada baris ke-i dan kolom ke-j, dinotasikan c_{ij}, diperoleh dengan cara mengalikan entry baris ke-i dari matriks A terhadap entry kolom ke-j dari matriks B, kemudian dijumlahkan. Dinotasikan

$$c_{ij} = a_{i1}.b_1j + a_{i2}.b_{2j} + a_{i3}.a_{3j} + \ldots + a_{in}.b_{nj}$$

Mari kita pelajari contoh-contoh di bawah ini, untuk memudahkan kita mengerti akan konsep di atas!

Contoh 3.6

a) Diketahui matriks $A_{3\times3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ dan $B_{3\times3} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$,

Matriks hasil perkalian matriks A dan matriks B:

$$A.B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}.b_{11} + a_{12}.b_{21} + a_{13}.b_{31} & a_{11}.b_{12} + a_{12}.b_{22} + a_{13}.b_{32} & a_{11}.b_{13} + a_{12}.b_{23} + a_{13}.b_{33} \\ a_{21}.b_{11} + a_{22}.b_{21} + a_{23}.b_{31} & a_{21}.b_{12} + a_{22}.b_{22} + a_{23}.b_{32} & a_{21}.b_{13} + a_{22}.b_{23} + a_{23}.b_{33} \\ a_{31}.b_{11} + a_{32}.b_{21} + a_{33}.b_{31} & a_{31}.b_{12} + a_{32}.b_{22} + a_{33}.b_{32} & a_{31}.b_{13} + a_{32}.b_{23} + a_{33}.b_{33} \end{bmatrix}$$

Sekarang, tentukan hasil perkalian matriks B terhadap matriks A. Kemudian, simpulkan apakah berlaku atau tidak sifat komutatif pada perkalian matriks? Berikan alasanmu!

b) Mari kita tentukan hasil perkalian matriks $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$. Dengan menggunakan konsep perkalian dua matriks di atas, diperoleh:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2+2.1 & 1.3+2.2 & 1.4+2.0 \\ 3.2+4.1 & 3.3+4.2 & 3.4+4.0 \\ 5.2+6.1 & 5.3+6.2 & 5.4+6.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 4 \\ 10 & 17 & 12 \\ 16 & 27 & 20 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan hasil diskusi yang kamu peroleh pada contoh a), silakan periksa apakah matriks $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ dapat dikalikan terhadap matriks $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$? Berikan penjelasanmu!

3.4.1 Tranpose Matriks

Misalkan ada perubahan pada posisi entry-entry matriks seperti entry baris ke-1 pada matriks B menjadi entry kolom ke-1 pada matriks B^t, setiap entry baris ke-2 pada matriks menjadi entry kolom ke-2 pada matriks B^t, demikian seterusnya, hingga semua entry baris pada matriks B menjadi entry kolom pada matriks B^t. Hal inilah yang menjadi aturan menentukan transpose matriks suatu matriks.

Transpose dari matriks A berordo $m \times n$ adalah matriks yang diperoleh dari matriks A dengan menukar entry baris menjadi entry kolom dan sebaliknya, sehingga berordo $n \times m$. Notasi transpose matriks $A_{m\times n}$ adalah $A^t_{m\times n}$.

Contoh 3.7

a) Jika $A = \begin{bmatrix} 15 & 5 \\ 30 & 25 \end{bmatrix}$, maka $A^t = \begin{bmatrix} 15 & 30 \\ 5 & 25 \end{bmatrix}$

b) Jika $S = \begin{bmatrix} 10 & 20 & 14 \\ 18 & 12 & 8 \\ 22 & 6 & 17 \end{bmatrix}$,

maka transpose matriks S, adalah $S^t = \begin{bmatrix} 10 & 18 & 22 \\ 20 & 12 & 6 \\ 14 & 8 & 17 \end{bmatrix}$.

c) Jika $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 3 \\ 14 & 9 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 8 & 6 \\ 3 & 7 & 12 & 4 \end{bmatrix}$, maka $C^t = \begin{bmatrix} 1 & 14 & 2 & 3 \\ 0 & 9 & 5 & 7 \\ 5 & 4 & 8 & 12 \\ 3 & 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}$.

Dari pembahasan contoh di atas, dapat kita pahami perubahan ordo matriks. Misalnya, jika matriks awal berordo $m \times n$, maka transpose matriks berordo $n \times m$.

Coba kamu pikirkan.

- Mungkinkah suatu matriks sama dengan transpose matriksnya sendiri? Berikan alasanmu!
- Periksa apakah $(A^t + B^t) = (A + B)^t$ untuk setiap matriks A dan B berordo $m \times n$?

Uji Kompetensi 3.1

1. Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 8 & 12 & 14 \\ 18 & 16 & 8 \\ 22 & 6 & 17 \end{bmatrix}$.

   Sebutkan entry matriks yang terletak pada:
   a. baris ke-2;
   b. kolom ke-3;
   c. baris ke-3 dan kolom ke-1;
   d. baris ke-1 dan kolom ke-3.

2. Berikan sistem persamaan linear berikut:

   a. $3x + 4y - 3z = 12$
   $-2x + 7y - 6z = 9$
   $5x + 8y - z = -10$

   b. $-4 = 6x + 13y$
   $-5 = 15x + 2y$

   c. $-3 = 9x + 6y - 7z$
   $-5 = 12x + 4y - 8z$

   d. $5x = 15$
   $-y - 4 = 6$
   $y = 0$

   Nyatakanlah:
   i. matriks koefisien sistem persamaan linear tersebut;
   ii. ordo matriks yang terbentuk.

3. Buatlah matriks yang terdiri atas 5 baris dan 3 kolom dengan entrynya adalah 15 bilangan prima yang pertama.

4. Untuk matriks-matriks berikut tentukan pasangan-pasangan matriks yang sama.

$$A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}^t, D=\begin{bmatrix} p & q & r \\ s & t & u \end{bmatrix}$$

5. Misalkan matriks $A = \begin{pmatrix} p+2 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} p & 6 \\ 6 & q+3 \end{pmatrix}$. Bila $3A = B$, tentukan nilai p dan q!

6. Diketahui $\begin{bmatrix} p-q & q+r \\ 3s+r & 2p-4s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 2 \\ 14 & 12 \end{bmatrix}$. Tentukan nilai p, q, r, dan s.

7. Jika diketahui matriks $\begin{pmatrix} p+2 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p & 6 \\ 6 & q+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}$, tentukan nilai p dan q!

8. Diketahui matriks-matriks

$$A=[2\ \ 3\ \ 5], B=\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^t, \text{ dan } F=[2\ \ 4\ \ 6]^t.$$

Dari semua matriks di atas, pasangan matriks manakah yang dapat dijumlahkan dan dikurangkan. Kemudian selesaikanlah!

9. Jika $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ -4 & 10 & 9 \end{bmatrix}$, dan X suatu matriks berordo 2×3 serta memenuhi persamaan $A + X = B$, tentukan matriks X!

10. Tentukanlah hasil perkalian matriks-matriks berikut!

a) $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & -4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot 15$

b) $6 \cdot \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 8 & 8 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

11. Diketahui matriks $G = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ dan lima matriks yang dapat dipilih untuk dikalikan terhadap matriks G, yaitu:

    $H = [1 \;\; 0 \;\; 1]$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $J = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $K = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 2 \end{bmatrix}$, dan $L = G^t$.

    Matriks yang manakah dapat dikalikan terhadap matriks G? Kemudian tentukan hasilnya!

12. Diketahui transpose matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 7 & 9 & 11 \\ 12 & 14 & 16 \end{bmatrix}$. Tentukanlah:

    a. matriks A
    b. nilai x dan y jika $x = a_{23} + 4a_{33} - 6$ dan $y = a_{23}{}^2 + 4a_{33}{}^2$.

13. Diketahui matriks-matriks $T = \begin{bmatrix} -2a & a-2b \\ b+c & 3d+c \\ e-2d & e-3f \end{bmatrix}$ dan $R = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 0 \\ 2 & 10 & 1 \end{bmatrix}$.

    a) Tentukan transpose dari matriks T!
    b) Jika $R^t = T$, tentukanlah nilai a, b, c, d, e, dan f!

14. Diketahui matriks-matriks berikut.

$$K=\begin{bmatrix}2x+1 & 2+y\\ 2-z & a+3\end{bmatrix},\ L=\begin{bmatrix}x & 4y\\ 2z & 1+3a\end{bmatrix},\ M=\begin{bmatrix}12 & 6\\ 20 & 2\end{bmatrix}.$$

Jika $M-2L=3K$, tentukan nilai-nilai *x, y, z* dan α.

15. Diketahui matriks $A=\begin{bmatrix}a & b & c\\ d & e & f\end{bmatrix}$ dan matriks $X=\begin{bmatrix}r & s & t\\ u & v & w\end{bmatrix}$.

Syarat apakah yang harus dipenuhi supaya matriks *A* sama dengan matriks *X*? Jelaskan.

Soal Proyek

Temukan contoh penerapan matriks dalam Ilmu Komputer, bidang Ilmu Fisika, Kimia, dan Teknologi Farmasi. Selanjutnya coba terapkan berbagai konsep dan aturan matriks dalam menyusun buku teks di sebuah perpustakaan. Pikirkan bagaimana susunan buku teks, seperti: buku Matematika, Fisika, Biologi, Kimia, dan IPS dari berbagai jenisnya (misalnya jenis buku Matematika tersedia buku Aljabar, Geometri, Statistika, dan lain-lain) tampak pada susunan baris dan kolom suatu matriks. Kamu dapat membuat pengkodean dari buku-buku tersebut agar para pembaca dan yang mencari buku tertentu mudah untuk menemukannya.

Buat laporan hasil kerja kelompokmu dan hasilnya disajikan di depan kelas.

3.5 Determinan dan Invers Matriks

3.5.1 Determinan Matriks

Masalah 3.6

Siti dan teman-temannya makan di kantin sekolah. Mereka memesan 3 ayam penyet dan 2 gelas es jeruk di kantin sekolahnya. Tak lama kemudian, Beni dan teman-temannya datang memesan 5 porsi ayam penyet dan 3 gelas es jeruk. Siti menantang Amir menentukan harga satu porsi ayam penyet dan harga es jeruk per gelas, jika Siti harus membayar Rp70.000,00 untuk semua pesanannya dan Beni harus membayar Rp115.000,00 untuk semua pesanannya.

Alternatif Penyelesaian:

Cara I

Petunjuk: Ingat kembali materi sistem persamaan linear yang sudah kamu pelajari. Buatlah sistem persamaan linear dari masalah tersebut, lalu selesaikan dengan matriks.

Misalkan x = harga ayam penyet per porsi

y = harga es jeruk per gelas

Sistem persamaan linearnya: $3x + 2y = 70.000$
$5x + 3y = 115.000$

Dalam bentuk matriks adalah sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70.000 \\ 115.000 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Mengingat kembali bentuk umum persamaan linear.

$$\left.\begin{matrix} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{matrix}\right\} \rightarrow \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Solusi persamaan tersebut adalah:

$$x = \frac{b_2 \cdot c_1 - b_1c_2}{a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1} \text{ dan } y = \frac{a_1 \cdot c_2 - a_2 \cdot c_1}{a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1},\ a_1.b_2 \neq a_2.b_1 \quad (3.2)$$

Ingat kembali bagaimana menentukan himpunan penyelesain SPLDV. Tentunya kamu mampu menunjukkannya.

Cara II

Dalam konsep matriks, nilai $(a_1.b_2 - a_2.b_1)$ disebut sebagai determinan matriks $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$, dinotasikan $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ atau det A, dengan matriks $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} = A$.

Oleh karena itu, nilai x dan y pada persamaan (3.2), dapat ditulis menjadi:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \text{ dan } y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \quad (3.3)$$

dengan $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \neq 0$.

Kembali ke persamaan (3.1), dengan menerapkan persamaan (3.3), maka diperoleh:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 70.000 & 2 \\ 115.000 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{210.000 - 230.000}{9 - 10} = \frac{-20.000}{-1} = 20.000$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 70.000 \\ 5 & 115.000 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{345.000 - 350.000}{9 - 10} = \frac{-5.000}{-1} = 5.000$$

Jadi, harga ayam penyet satu porsi adalah Rp20.000,00 dan harga es jeruk satu gelas adalah Rp5.000,00.

Notasi Determinan

Misalkan matriks $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Determinan dari matriks A dapat dinyatakan

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

3.5.2 Sifat-Sifat Determinan

Misalkan matriks $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ dan matriks $B = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 8 = 5$$

$$\det B = |B| = \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 3 - 8 = -5$$

Jadi $|A| \times |B| = -25$

Matriks $A \times B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -17 & -16 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$

Dengan demikian det (A × B) = |AB| = $\begin{vmatrix} -17 & -16 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}$ = –153 + 128 = –25

Sifat 3.1

Misalkan matriks A dan B berordo $m \times m$ dengan $m \in N$. Jika det $A = |A|$ dan det $B = |B|$, maka $|AB| = |A|.|B|$

Contoh 3.8

Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ dan matriks $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Tunjukkan bahwa $|A.B| = |A|.|B|$!

Alternatif Penyelesaian:

Sebelum kita menentukan determinan $A.B$, mari kita tentukan terlebih dahulu matriks $A.B$, yaitu:

$$A.B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 28 \\ 20 & 28 \end{bmatrix}.$$

Dengan matriks $A.B$ tersebut kita peroleh $|A.B| = \begin{vmatrix} 19 & 28 \\ 20 & 28 \end{vmatrix} = -28.$

Sekarang akan kita bandingkan dengan nilai $|A|.|B|$.

Dengan matriks $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ maka $|A| = 14$, dan $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ maka $|B| = -2$.

Nilai $|A|.|B| = 14.(-2) = -28$

Jadi, benar bahwa $|A.B| = |A|.|B| = -28$.

Soal Tantangan

- Selidiki apakah $|A.B.C| = |A|.|B|.|C|$ untuk setiap matriks-matriks A, B, dan C berordo $n \times n$.
- Jika matriks A adalah matriks persegi dan k adalah skalar, coba telusuri nilai determinan matriks $k.A$.

Contoh 3.9

Matriks P ordo 2×2 dengan $P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dimana $a, b, c, d \in R$. Jika determinan P adalah α, dengan $\alpha \in R$, tentukanlah determinan dari matriks $Q = \begin{bmatrix} a & b \\ xc - sa & xd - sb \end{bmatrix}$ dengan $x, y \in R$.

Alternatif Penyelesaian:

Jika $P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, dan determinannya adalah α, maka berlaku

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = \alpha \ .$$

Entry matriks Q memiliki hubungan dengan matriks P, yaitu:
q_{21}= hasil kali skalar x terhadap p_{21} – hasil kali skalar s terhadap p_{11}
q_{22}= hasil kali skalar x terhadap p_{22} – hasil kali skalar s terhadap p_{12}.
Tujuan kita sekarang adalah mereduksi matriks Q menjadi kelipatan matriks P.
Adapun langkah-langkahnya adalah sebagai berikut:

$$Q = \begin{bmatrix} a & b \\ xc - sa & xd - sb \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow baris 1 \\ \rightarrow baris 2 \end{matrix}$$

Entry baris 1 matriks Q = entry baris 1 matriks P. Mereduksi dalam hal ini adalah mengoperasikan entry baris 2 matriks Q menjadi entry baris 2 matriks P.

Jadi, q_{21} dapat dioperasikan menjadi: $(q_{21})^* = s.q_{11} + q_{21}$, akibatnya kita peroleh:

$$Q = \begin{bmatrix} a & b \\ xc - sa + sa & xd - sb + sb \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} a & b \\ cx & dx \end{bmatrix} \begin{matrix} \to baris1* \\ \to baris2* \end{matrix}$$

Menurut sifat determinan matriks (silakan minta penjelasan lebih lanjut dari Guru Matematika), maka:

$$\begin{aligned} |Q| = \begin{vmatrix} a & b \\ cx & dx \end{vmatrix} &= a.dx - b.cx \\ &= x(a.d - b.c) \\ &= x.\alpha \end{aligned}$$

Jadi $|Q| = x\alpha$.

Soal Tantangan

Misal matriks P adalah matriks berordo 3 × 3, dengan $|P| = \alpha$ dan matriks Q berordo 3 × 3 dan mengikuti pola seperti contoh di atas. Tentukan determinan matriks Q.

Perhatikan kembali matriks A di atas dan ingat kembali menentukan transpose sebuah matriks yang sudah dipelajari,

Matriks $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ dan matriks transpose dari matriks A adalah $A^t = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

det $A^t = |A^t| = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 8 = 5$

Perhatikan dari hasil perhitungan det A dan det A^t. Diperoleh det A = det A^t.

Sifat 3.2
Misalkan matriks A dan B berordo $m \times m$ dengan $m \in N$. Jika det A = $|A|$ dan det $A^t = |A^t|$, maka $|A| = |A^t|$

Coba buktikan sifat berikut setelah kamu mempelajari invers matriks.

Sifat 3.3
Misalkan matriks A dan B berordo $m \times m$ dengan $m \in N$.
Jika det $A = |A|$ dan det $A^{-1} = |A^{-1}|$, maka $|A^{-1}| = \dfrac{-1}{|A|}$

Masalah 3.7

Sebuah perusahaan penerbangan menawarkan perjalanan wisata ke negara A, perusahaan tersebut mempunyai tiga jenis pesawat yaitu Airbus 100, Airbus 200, dan Airbus 300. Setiap pesawat dilengkapi dengan kursi penumpang untuk kelas turis, ekonomi, dan VIP. Jumlah kursi penumpang dari tiga jenis pesawat tersebut disajikan pada tabel berikut.

Kategori	Airbus 100	Airbus 200	Airbus 300
Kelas Turis	50	75	40
Kelas Ekonomi	30	45	25
Kelas VIP	32	50	30

Perusahaan telah mendaftar jumlah penumpang yang mengikuti perjalanan wisata ke negara A seperti pada tabel berikut.

Kategori	Jumlah Penumpang
Kelas Turis	305
Kelas Ekonomi	185
Kelas VIP	206

Berapa banyak pesawat yang harus dipersiapkan untuk perjalanan tersebut?

Alternatif Penyelesaian:

Untuk memudahkan kita menyelesaikan masalah ini, kita misalkan:
x = banyaknya pesawat Airbus 100
y = banyaknya pesawat Airbus 200
z = banyaknya pesawat Airbus 300
Sistem persamaan yang terbentuk adalah:

$$\left.\begin{array}{r} 50x + 75y + 40z = 305 \\ 30x + 45y + 25z = 185 \\ 32x + 50y + 30z = 206 \end{array}\right\} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 305 \\ 185 \\ 206 \end{bmatrix}$$

Sebelum ditentukan penyelesaian masalah di atas, terlebih dahulu kita periksa apakah matriks A adalah matriks nonsingular.

Ada beberapa cara untuk menentukan det A, antara lain Metode Sarrus. Cara tersebut sebagai berikut.

Misalnya matriks $A_{3\times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, maka deteminan A adalah:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$= a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32} - a_{31}.a_{22}.a_{13} - a_{32}.a_{23}.a_{11} - a_{33}.a_{21}.a_{12}$$

Untuk matriks pada Masalah 3.7,

$$\begin{vmatrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{vmatrix} = \left|\begin{matrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 50 & 75 \\ 30 & 45 \\ 32 & 50 \end{matrix}$$

$$= (50 \times 45 \times 30) + (75 \times 25 \times 32) + (40 \times 30 \times 50) - (32 \times 45 \times 40) - (50 \times 25 \times 50) - (30 \times 30 \times 75)$$
$$= -100.$$

Analog dengan persamaan (2), kita akan menggunakan determinan matriks untuk menyelesaikan persoalan di atas.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 305 & 75 & 40 \\ 185 & 45 & 25 \\ 206 & 50 & 30 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{vmatrix}} = \frac{-300}{-100} = 3 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 50 & 305 & 40 \\ 30 & 185 & 25 \\ 32 & 206 & 30 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{vmatrix}} = \frac{-100}{-100} = 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 50 & 75 & 305 \\ 30 & 45 & 185 \\ 32 & 50 & 206 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{vmatrix}} = \frac{-200}{-100} = 2$$

Oleh karena itu, banyak pesawat Airbus 100 yang disediakan sebanyak 3 unit, banyak pesawat Airbus 200 yang disediakan sebanyak 1 unit, banyak pesawat Airbus 300 yang disediakan sebanyak 2 unit.

3.5.3 Invers Matriks

Perhatikan Masalah 3.7 di atas. Kamu dapat menyelesaikan masalah tersebut dengan cara berikut. Perhatikan sistem persamaan linear yang dinyatakan dalam matriks berikut,

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70.000 \\ 115.000 \end{bmatrix} \leftrightarrow A.X = B \leftrightarrow X = A^{-1}.B$$

Karena A adalah matriks nonsingular, maka matriks A memiliki invers. Oleh karena itu, langkah kita lanjutkan menentukan matriks X.

$$X = \frac{1}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}} . \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 70.000 \\ 115.000 \end{bmatrix}$$

$$X = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} -20.000 \\ -5.000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20.000 \\ 5.000 \end{bmatrix}$$

Diperoleh $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20.000 \\ 5.000 \end{bmatrix} \leftrightarrow x = 20.000$ dan $y = 5.000$.

Ditemukan jawaban yang sama dengan cara I. Akan tetapi, perlu pertimbangan pemilihan cara yang digunakan menyelesaikan persoalannya.

Misalkan A dan B adalah matriks yang memenuhi persamaan berikut.

$$A.X = B \qquad (1)$$

Persoalannya adalah bagaimana menentukan matriks X pada persamaan (1)?

Pada teori dasar matriks, bahwa tidak ada operasi pembagian pada matriks tetapi yang ada adalah invers matriks atau kebalikan matriks.

Misalkan A matriks persegi berordo 2×2. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Invers matriks A, dinotasikan A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{1}{(a.d - b.c)} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}, \text{ dengan } a.d \neq b.c.$$

$\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ disebut adjoin matriks A dan dinotasikan *Adjoin* A.

Salah satu sifat invers matriks adalah $A^{-1}.A = A.A^{-1} = I$.

Akibatnya persamaan (1) dapat dimodifikasi menjadi:

$A^{-1}.A.X \quad = A^{-1}B.$ (semua ruas dikalikan A^{-1}).

$(A^{-1}.A).X = A^{-1}B$

$I.X \quad = A^{-1}B$

$X \quad = A^{-1}B$ (karena $I.X = X$) (2)

Rumusan ini berlaku secara umum, dengan syarat det $A \neq 0$.

Definisi 3.4

Misalkan A sebuah matriks persegi dengan ordo $n \times n, n \in N$

- Matriks A disebut matriks nonsingular, apabila $det\ A \neq 0$.
- Matriks A disebut matriks singular apabila $det\ A \neq 0$.
- A^{-1} disebut invers matriks A jika dan hanya jika $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. I adalah matriks identitas perkalian matriks.

Masalah 3.8

Agen perjalanan Sumatera Holidays menawarkan paket perjalanan ke Danau Toba, yaitu menginap di Inna Parapat Hotel, transportasi ke tiap tempat wisata, dan makan di Singgalang Restaurant. Paket perjalanan yang ditawarkan yaitu Paket I terdiri 4 malam menginap, 3 tempat wisata, dan 5 kali makan dengan biaya Rp2.030.000,00. Paket II dengan 3 malam menginap, 4 tempat wisata, dan 7 kali makan dengan biaya Rp1.790.000,00. Paket III dengan 5 malam menginap, 5 tempat wisata, dan 4 kali makan dengan biaya Rp2.500.000,00. Berapakah biaya sewa hotel tiap malam, transportasi, dan makan?

Alternatif Penyelesaian:

Misalkan:
x = biaya sewa hotel
y = biaya untuk transportasi
z = biaya makan

	Paket 1	Paket 2	Paket 3
Sewa hotel	4	3	5
Transportasi	3	4	5
Makan	5	7	4
Biaya total	2.030.000	1.790.000	2.500.000

Dalam bentuk matriks adalah seperti berikut:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \\ 5 & 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.030.0000 \\ 1.790.000 \\ 2.500.000 \end{bmatrix}$$

a. Determinan untuk matriks masalah 3.8 di atas:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \\ 5 & 5 & 4 \end{bmatrix} \text{ maka det } A = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \\ 5 & 5 & 4 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \\ 5 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= (4 \times 4 \times 4) + (3 \times 7 \times 5) + (5 \times 3 \times 5) - (5 \times 4 \times 5) - (4 \times 7 \times 5) - (3 \times 3 \times 4)$$

$$= -32$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2.030.000 & 3 & 5 \\ 1.790.000 & 4 & 7 \\ 2.500.000 & 5 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \\ 5 & 5 & 4 \end{vmatrix}} = -\frac{12.800.000}{-32} = 400.000$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 2.030.000 & 5 \\ 3 & 1.790.000 & 7 \\ 5 & 2.500.000 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \\ 5 & 5 & 4 \end{vmatrix}} = -\frac{1.920.000}{-32} = 60.000$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2.030.000 \\ 3 & 4 & 1.790.000 \\ 5 & 5 & 2.500.000 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \\ 5 & 5 & 4 \end{vmatrix}} = -\frac{1.600.000}{-32} = 50.000$$

Oleh karena itu, biaya sewa hotel tiap malam adalah Rp400.000,00 biaya transportasi adalah Rp60.000,00 dan biaya makan adalah Rp50.000,00.

Cobalah kamu menyelesaikan masalah tersebut dengan cara menentukan invers matriks. Mintalah bimbingan dari gurumu.

Metode Kofaktor

Terlebih dahulu kamu memahami tentang minor suatu matriks. Minor suatu matriks A dilambangkan dengan M_{ij} adalah determinan matriks bagian dari A yang diperoleh dengan cara menghilangkan entry-entry pada baris ke-i dan kolom ke-j.

Jika A adalah sebuah matriks persegi berordo $n \times n$, maka minor entry a_{ij} yang dinotasikan dengan M_{ij}, didefinisikan sebagai determinan dari submatriks A berorde $(n-1) \times (n-1)$ setelah **baris ke-*i*** dan **kolom ke-*j*** dihilangkan.

Misalkan matriks $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

Minor entry a_{11} adalah determinan $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

sehingga $M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

M_{11}, M_{12}, dan M_{13} merupakan submatriks hasil ekspansi baris ke-1 dari matriks A. Kofaktor suatu entry baris ke-i dan kolom ke-j dari matriks A dilambangkan:

$k_{ij} = (-1)^{i+j} \, |M_{ij}| = (-1)^{ij} \det(M_{ij})$

$k_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -19$ $\qquad$ $k_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = -5$

$k_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 23$

$k_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 13$ $\qquad$ $k_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = -5$

$$k_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -9$$

$$k_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 1 \qquad k_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 7$$

$$k_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -13$$

Dari masalah di atas diperoleh matriks kofaktor A dengan menggunakan rumus:

$$K(A) = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -19 & 23 & -5 \\ 13 & -9 & -5 \\ 1 & -13 & 7 \end{bmatrix}$$

Matriks adjoin dari matriks A adalah transpose dari kofaktor-kofaktor matriks tersebut, dilambangkan dengan $Adj(A) = (k_{ij})^t$, yaitu:

$$adj(A) = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -19 & 13 & 1 \\ 23 & -9 & -18 \\ -5 & -5 & 7 \end{bmatrix}$$

Dari masalah 2.10 di atas, diperoleh invers matriks A. Dengan rumus:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} adj(A)$$

Sehingga: $A^{-1} = \frac{1}{\det A} adj(A) = -\frac{1}{32}\begin{pmatrix} -19 & 13 & 1 \\ 23 & -9 & -13 \\ -5 & -5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{19}{32} & \frac{-13}{32} & \frac{-1}{32} \\ \frac{-23}{32} & \frac{9}{32} & \frac{13}{32} \\ \frac{5}{32} & \frac{5}{32} & \frac{-7}{32} \end{pmatrix}$

Berdiskusilah dengan temanmu satu kelompok, coba tunjukkan bahwa $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, dengan I adalah matriks identitas 3×3.

Bentuk matriks permasalahan 3.8 adalah seperti berikut:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \\ 5 & 5 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.030.000 \\ 1.790.000 \\ 2.500.000 \end{bmatrix}$$

Bentuk ini dapat kita nyatakan dalam bentuk persamaan $AX = B$. Untuk memperoleh matriks X yang entry-entrynya menyatakan biaya sewa hotel, biaya transportasi, dan biaya makan, kita kalikan matriks A^{-1} ke ruas kiri dan ruas kanan persamaan $AX = B$, sehingga diperoleh:

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{19}{32} & \frac{-13}{32} & \frac{-1}{32} \\ \frac{-23}{32} & \frac{9}{32} & \frac{13}{32} \\ \frac{5}{32} & \frac{5}{32} & \frac{-7}{32} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2.030.000 \\ 1.790.000 \\ 2.500.000 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 400.000 \\ 60.000 \\ 50.000 \end{pmatrix}$$

Hasil yang diperoleh dengan menerapkan cara determinan dan cara invers, diperoleh hasil yang sama, yaitu; biaya sewa hotel tiap malam adalah Rp400.000,00; biaya transportasi adalah Rp60.000,00; dan biaya makan adalah Rp50.000,00.

3.5.4 Sifat-Sifat Invers Matriks

Misalkan matriks A = $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

$\det(A) = 2(-2) - 1(-3) = -1$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} adj(A) = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(A^{-1})^{-1} = \frac{1}{\det A^{-1}} adj(A^{-1}) = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = A$$

Perhatikan uraian di atas diperoleh bahwa $(A^{-1})^{-1} = A$.

Sifat 3.4
Misalkan matriks A berordo $n \times n$ dengan $n \in N$, $\det(A) \neq 0$. Jika A^{-1} adalah invers matriks A, maka $(A^{-1})^{-1} = A$.

Perhatikan pertanyaan, apakah $(AB)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$

Misalkan matriks $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

$\det(A) = 2(-2) - 1(-3) = -1$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} adj(A) = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$\det(B) = 0(-2) - 3(-1) = 3$

$$B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} adj(B) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$\det AB = -3 - 0 = -3$

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{\det AB} Adj(AB) == \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$B^{-1}A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Dari perhitungan di atas diperoleh $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Sifat 3.5
Misalkan matriks A dan B berordo $n \times n$ dengan $n \in N$, det $A \neq 0$ dan det $B \neq 0$. Jika A^{-1} dan B^{-1} adalah invers matriks A dan B, maka
$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$.

- Coba kamu diskusikan dengan temanmu satu kelompok, apakah $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$. Jika tidak, beri alasannya!

Uji Kompetensi 3.2

1. Tentukan determinan matriks berikut ini.

   a. $\begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$

   b. $\begin{bmatrix} 4x & -2x \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$

   c. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

   d. $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

2. Selidiki bahwa det.K^n = (det K)^n, untuk setiap:

   a) $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ dengan n = 2

   b) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 5 & -3 & 6 \end{bmatrix}$ dengan n = 3

3. Tentukanlah z yang memenuhi persamaan berikut!

   $$\begin{vmatrix} z & 5 & 7 \\ 0 & z+1 & 6 \\ 0 & 0 & 2z-1 \end{vmatrix} = 0$$

4. Tentukanlah z yang memenuhi persamaan berikut:

   $$\begin{vmatrix} z & 5 & 7 \\ 0 & z+1 & 6 \\ 0 & 0 & 2z-1 \end{vmatrix} = 0$$

5. Jika $P = \begin{vmatrix} z & -1 \\ 3 & z-1 \end{vmatrix}$ dan $Q = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & z & -6 \\ 1 & 3 & z-5 \end{vmatrix}$ maka tentukan nilai z sehingga determinan P sama dengan determinan Q.

6. Selidiki bahwa det $C + D$ = det C + det D, untuk setiap matriks C dan D merupakan matriks persegi.
7. Entry baris ke-1 suatu matriks persegi adalah semuanya nol. Tentukanlah determinan matriks tersebut!
8. Periksalah kebenaran setiap pernyataan berikut ini. Berikanlah contoh penyangkal untuk setiap pernyataan yang tidak berlaku!
   a) det $2A$ = 2.det A
   b) $|A| = |A|^2$
   c) det $I + A$ = 1 + det A

   Untuk matriks A merupakan matriks persegi.
9. Matriks-matriks P dan Q adalah matriks berordo $n \times n$ dengan $PQ \neq QP$. Apakah det PQ = det QP? Jelaskan!
10. Diketahui matriks R adalah matriks berordo $n \times n$ dengan entry kolom ke-1 semuanya nol. Tentukanlah determinan matriks tersebut. Berikan juga contohnya!
11. Diberikan suatu sistem persamaan linear dua variabel.

    $x + y = 3$

    $2x - y = 0$

    Tentukanlah nilai x dan y yang memenuhi sistem tersebut dengan menggunakan konsep matriks.
12. Sebuah toko penjual cat eceran memiliki persediaan tiga jenis cat eksterior yaitu *reguler, deluxe,* dan *commercial*. Cat-cat tersebut tersedia dalam empat pilihan warna yaitu: biru, hitam, kuning, dan coklat. Banyak penjualan cat (dalam galon) selama satu minggu dicatat dalam matriks R, sedangkan inventaris toko pada awal minggu dalam matriks S berikut ini.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \textit{Biru} & \textit{Hitam} & \textit{Kuning} & \textit{Cokelat} \end{array} \\ R = & \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 8 & 6 \\ 6 & 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \textit{Regular} \\ \textit{Deluxe} \\ \textit{Commercial} \end{array} \end{array}$$

$$S = \begin{array}{c} \\ \end{array}\begin{matrix} \textit{Biru} & \textit{Hitam} & \textit{Kuning} & \textit{Cokelat} \\ \end{matrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \textit{Regular} \\ \textit{Deluxe} \\ \textit{Commercial} \end{matrix}$$

a. Tentukan inventaris toko pada akhir minggu

b. Jika toko menerima kiriman stok baru yang dicatat dalam matriks T, tentukan inventaris toko yang baru.

13. Tunjukkan bahwa $(ABCD)^{-1} = D^{-1},\ C^{-1},\ B^{-1},\ A^{-1}$!

14. Adakah suatu matriks yang inversnya adalah diri sendiri?

15. Tentukanlah determinan dari matriks:

$$M = \begin{bmatrix} n^2 & (n+1)^2 & (n+2)^2 \\ (n+1)^2 & (n+2)^2 & (n+3)^2 \\ (n+2)^2 & (n+3)^2 & (n+4)^2 \end{bmatrix}!$$

D. Penutup

Setelah telah selesai membahas materi matriks di atas, ada beberapa hal penting sebagai kesimpulan yang dijadikan pegangan dalam mendalami dan membahas materi lebih lanjut, antara lain:

1. Matriks adalah susunan bilangan-bilangan dalam baris dan kolom.
2. Sebuah matriks A ditransposekan menghasilkan matriks A^t dengan entry baris matriks A berubah menjadi entry kolom matriks A^t. Dengan demikian matriks A^t ditransposekan kembali, hasilnya menjadi matriks A atau $(A^t)^t = A$.
3. Penjumlahan sebarang matriks dengan matriks identitas penjumlahan hasilnya matriks itu sendiri. Matriks identitas penjumlahan adalah matriks nol.
4. Hasil kali sebuah matriks dengan suatu skalar atau suatu bilangan real k akan menghasilkan sebuah matriks baru yang berordo sama dan memiliki entry-entry k kali entry-entry matriks semula.

5. Dua buah matriks hanya dapat dikalikan apabila banyaknya kolom matriks yang dikali sama dengan banyaknya baris matriks pengalinya.
6. Hasil perkalian matriks A dengan matriks identitas perkalian, hasilnya adalah matriks A.
7. Hasil kali dua buah matriks menghasilkan sebuah matriks baru, yang entry-entrynya merupakan hasil kali entry baris matriks A dan entry kolom matriks B. Misal jika $A_{p\times q}$ dan $B_{q\times r}$ adalah dua matriks, maka berlaku $A_{p\times q} \times B_{q\times r} = C_{p\times r}$.
8. Matriks yang memiliki invers adalah matriks persegi dengan nilai determinannya tidak nol (0).

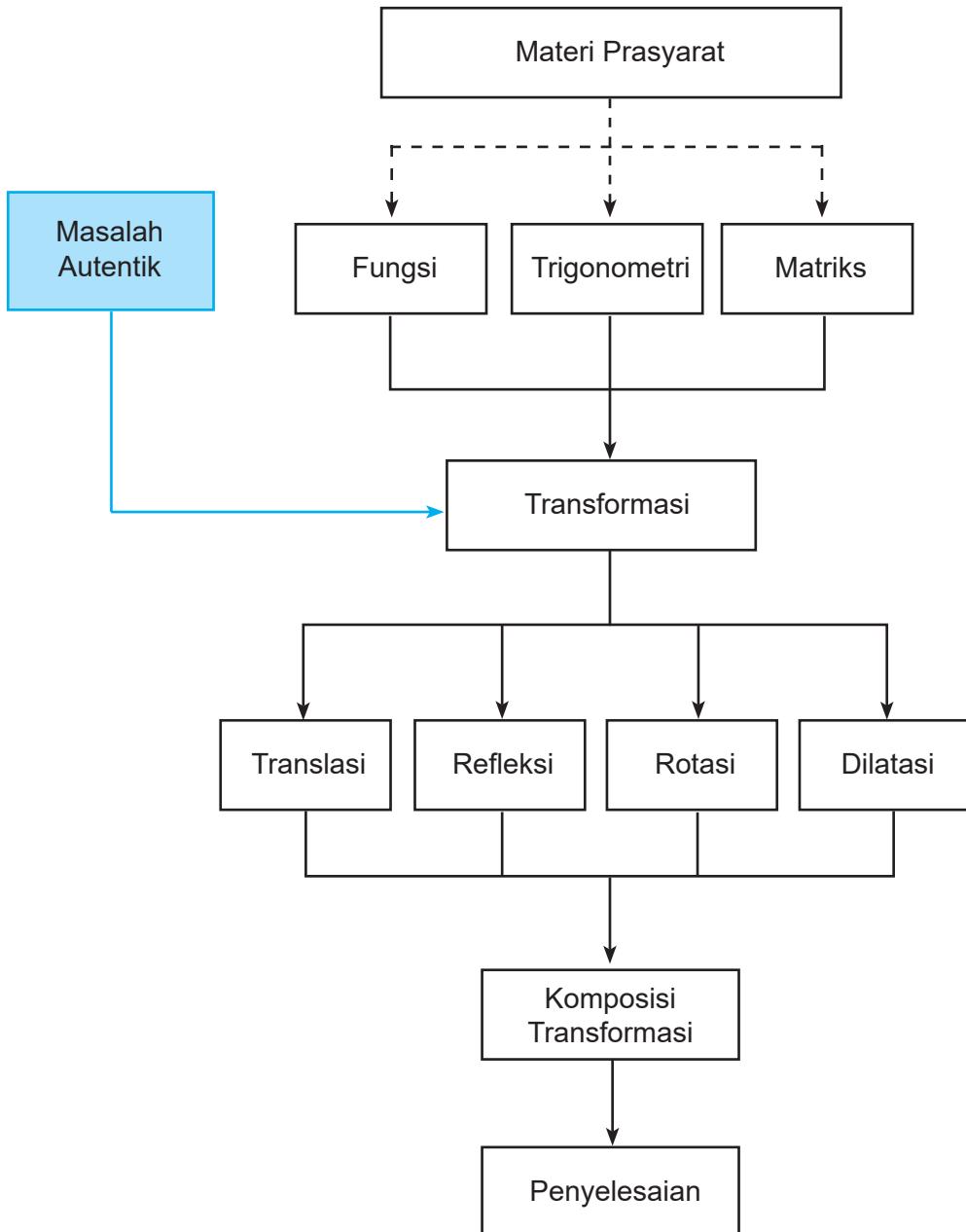
Transformasi

A. Kompetensi Dasar dan Pengalaman Belajar

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
Setelah mengikuti pembelajaran transformasi, siswa mampu: 3.5 Menganalisis dan membandingkan transformasi dan komposisi transformasi dengan menggunakan matriks. 4.5 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan matriks transformasi geometri (translasi, refleksi, dilatasi, dan rotasi).	Melalui pembelajaran materi transformasi, siswa memperoleh pengalaman belajar: • Mampu berpikir kreatif. • Mampu berpikir kritis dalam mengamati permasalahan. • Mengajak untuk melakukan penelitian dasar dalam membangun konsep. • Mengajak kerjasama tim dalam menemukan solusi permasalahan. • Mengajak siswa untuk menerapkan matematika dalam kehidupan sehari-hari. • Siswa mampu memodelkan permasalahan.

Istilah Penting

- Translasi
- Refleksi
- Rotasi
- Dilatasi
- Komposisi Transformasi

B. Diagram Alir

C. Materi Pembelajaran

Pada bab ini, kita akan membahas konsep transformasi seperti translasi (pergeseran), refleksi (pencerminan), rotasi (perputaran), dan dilatasi (perkalian) serta komposisinya dengan pendekatan koordinat. Untuk mempelajari materi ini, kamu diharapkan sudah memahami konsep matriks dan mengingat kembali materi transformasi yang telah kamu pelajari di SMP.

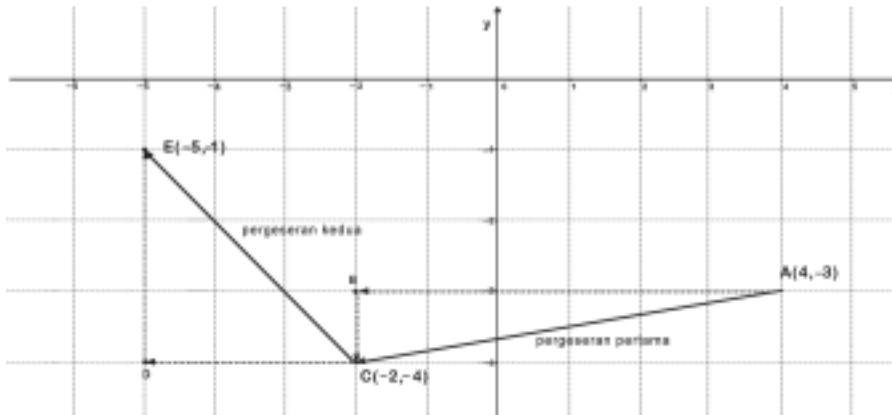
4.1 Menemukan Konsep Translasi (Pergeseran)

Coba kamu amati benda-benda yang bergerak di sekitar kamu. Benda-benda tersebut hanya berubah posisi tanpa mengubah bentuk dan ukuran. Sebagai contoh, kendaraan yang bergerak di jalan raya, pesawat terbang yang melintas di udara, bahkan diri kita sendiri yang bergerak kemana saja. Nah, sekarang kita akan membahas pergerakan objek tersebut dengan pendekatan koordinat. Kita asumsikan bahwa pergerakan ke arah sumbu x positif adalah ke kanan, pergerakan ke arah sumbu x negatif adalah ke kiri, pergerakan ke arah sumbu y positif adalah ke atas, dan pergerakan ke arah sumbu y negatif adalah ke bawah.

Masalah 4.1

Titik $A(4,–3)$ bergerak ke kiri 6 langkah dan ke bawah 1 langkah, kemudian dilanjutkan kembali bergerak ke kiri 3 langkah dan ke atas 3 langkah. Coba kamu sketsa pergerakan titik tersebut pada bidang koordinat kartesius. Dapatkah kamu temukan proses pergerakan titik tersebut?

Alternatif Penyelesaian:

Bila Masalah 4.1 disajikan dalam koordinat kartesius maka diperoleh gambar berikut. Perhatikan gambar!

Gambar 4.1: Pergeseran Titik *A*(4, –3)

Keterangan gambar:

Pergeseran 1. Posisi awal titik adalah *A*(4,–3), kemudian bergerak ke kiri 6 langkah dan ke bawah 1 langkah, sehingga posisi berubah di koordinat *C*(–2,–4). Hal ini berarti:

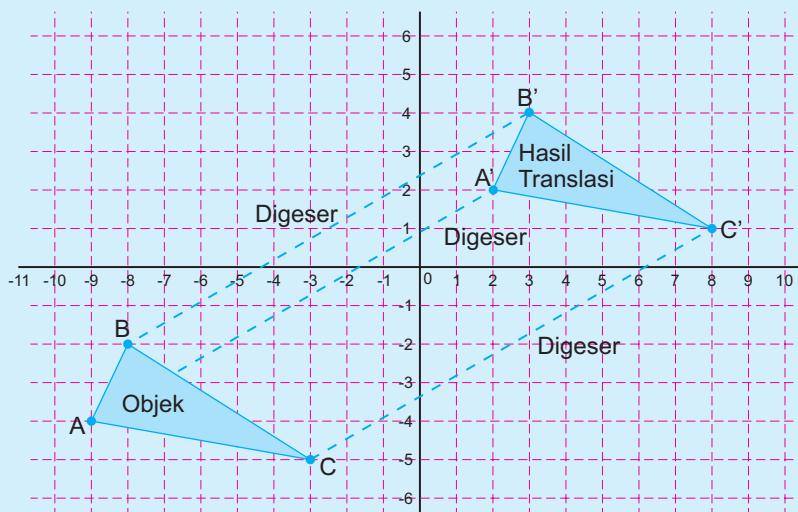
$$\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Pergeseran 2. Posisi sementara titik adalah *C*(–2,–4) dan mengalami pergeseran selanjutnya yaitu bergeser ke kiri 3 langkah dan ke atas 3 langkah, sehingga pada gambar tampak di posisi koordinat *E*(–5,–1). Hal ini berarti:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Jadi, posisi akhir titik *A*(4,–3) berada di titik *E*(–5,–1).

Masalah 4.2

Bagaimana, jika sebuah bidang digeser pada bidang koordinat kartesius? Coba kamu amati bidang Segitiga *ABC* yang digeser pada gambar berikut! Dapatkah kamu tentukan arah dan besar pergeserannya?

Gambar 4.2: Translasi segitiga *ABC* pada koordinat kartesius

Alternatif Penyelesaian:

Tampak pada gambar arah pergeseran titik A, B, dan C ke posisi titik A', B' dan C'. Secara analitik, semua titik-titik pada bidang segitiga tersebut akan ikut bergeser, bukan? Mari kita tentukan arah dan besar pergeseran bidang tersebut.

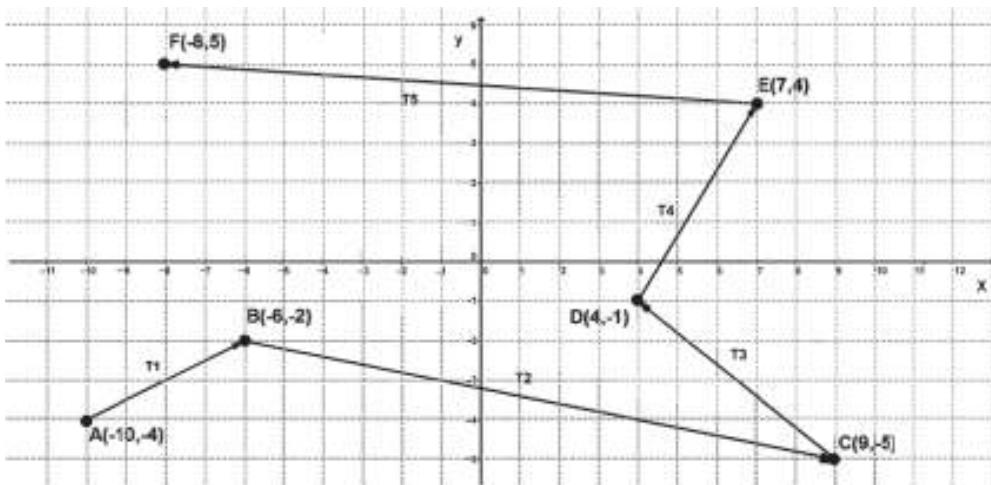
Posisi awal titik adalah $A(-9, -4)$, $B(-8, -2)$ dan $C(-3, -5)$, kemudian masing-masing bergeser ke kanan 11 langkah dan ke atas 6 langkah, sehingga posisi berubah dikoordinat $A'(2, 2)$, $B'(3, 4)$ dan $C'(8, 1)$ sesuai gambar. Hal ini dapat dituliskan sebagai:

$$\begin{pmatrix}-9\\-4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}11\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}-8\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}11\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}-3\\-5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}11\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\1\end{pmatrix}$$

Berdasarkan pengamatan pada pergeseran objek-objek di sekitar kita dan pergeseran objek-objek di bidang koordinat kartesius (Masalah 4.1 dan Masalah 4.2), dapat disimpulkan sifat translasi berikut:

Sifat 4.1

Bangun yang digeser (translasi) tidak mengalami perubahan bentuk dan ukuran.

Selanjutnya, kita akan menemukan konsep translasi dan kaitannya dengan konsep matriks. Kita amati kembali pergeseran titik-titik pada Masalah 4.1 dan Masalah 4.2 serta pada gambar berikut:

Gambar 4.3: Translasi titik *A* pada koordinat kartesius

Amati pergeseran setiap titik pada Gambar 4.3! Perhatikan arah pergeseran titik-titik tersebut! Kita tentukan koordinat masing-masing titik dan menuliskannya pada tabel di bawah ini. Coba kamu lengkapi Tabel 4.1!

Tabel 4.1: Translasi titik

Titik awal	Titik akhir	Proses	Translasi
$A(-10, -4)$	$B(-6, -2)$	$\begin{pmatrix}-6\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-10\\-4\end{pmatrix}$	$T_1\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$
$B(-6, -2)$	$C(9, -5)$	$\begin{pmatrix}9\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15\\-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6\\-2\end{pmatrix}$	$T_2\begin{pmatrix}15\\-3\end{pmatrix}$

$C(\ldots, \ldots)$	$D(\ldots, \ldots)$	...	...
$D(\ldots, \ldots)$	$E(\ldots, \ldots)$	...	...
$E(\ldots, \ldots)$	$F(\ldots, \ldots)$	...	...

Berdasarkan pengamatan pada tabel, secara umum diperoleh konsep:

Titik $A(x, y)$ ditranslasi oleh $T(a, b)$ menghasilkan bayangan $A'(x', y')$, ditulis dengan,

$$A(x,y) \xrightarrow{T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}} A'(x',y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Mari kita gunakan konsep translasi tersebut untuk menentukan hasil translasi titik dan fungsi $y = f(x)$ pada beberapa contoh berikut.

Contoh 4.1

Titik $A(2, 3)$ ditranslasikan dengan matriks translasi $T(-3, 4)$, tentukan bayangan A!

Alternatif Penyelesaian:

$$A(2,3) \xrightarrow{T\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}} A'(x',y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Bayangan A adalah $A'(-1, 7)$

Contoh 4.2

Garis k dengan persamaan $2x - 3y + 4 = 0$ ditranslasi dengan matriks translasi $T(-1, -3)$. Tentukanlah bayangan garis k tersebut!

Alternatif Penyelesaian:

Misalkan titik $A(x, y)$ memenuhi persamaan k sedemikian sehingga:

$$A(x,y) \xrightarrow{T\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}} A'(x',y')$$

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x-1\\y-3\end{pmatrix}$$

$$x' = x - 1 \Leftrightarrow x = x' + 1$$

$$y' = y - 3 \Leftrightarrow y = y' + 3$$

Dengan mensubstitusi x dan y ke garis k maka ditemukan persamaan garis k setelah ditranslasi, yaitu

$2(x+1)-3(y+3)+4 = 0$ atau $2x - 3y - 3 = 0$

Latihan 4.1

Titik $P(a, b + 2)$ digeser dengan $T(3, 2b–a)$ sehingga hasil pergeseran menjadi $Q(3a + b, –3)$. Tentukan posisi pergeseran titik $R(2, 4)$ oleh translasi T di atas.

Alternatif penyelesaian:

Coba ikuti panduan berikut:

Langkah 1:

$$P(a,b+2) \xrightarrow{T(3,2b-a)} Q(3a+b,-3)$$

$$\begin{pmatrix}3a+b\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\ldots\\\ldots\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\ldots\\\ldots\end{pmatrix}$$

$3a + b = \ldots$ atau $a = \ldots$ (persamaan 1)

$-3 = \ldots$ (persamaan 2)

Langkah 2:
Dengan mensubstitusi a = ... ke persamaan (2) maka diperoleh nilai b = . . .
Dengan demikian, translasi yang dimaksud adalah $T(3,2b–a) = T(..., ...)$.

Langkah 3:
Pergeseran titik $R(2,4)$ oleh translasi T adalah:

$$R(2,4)\xrightarrow{T(...,...)}R'(x,y)$$

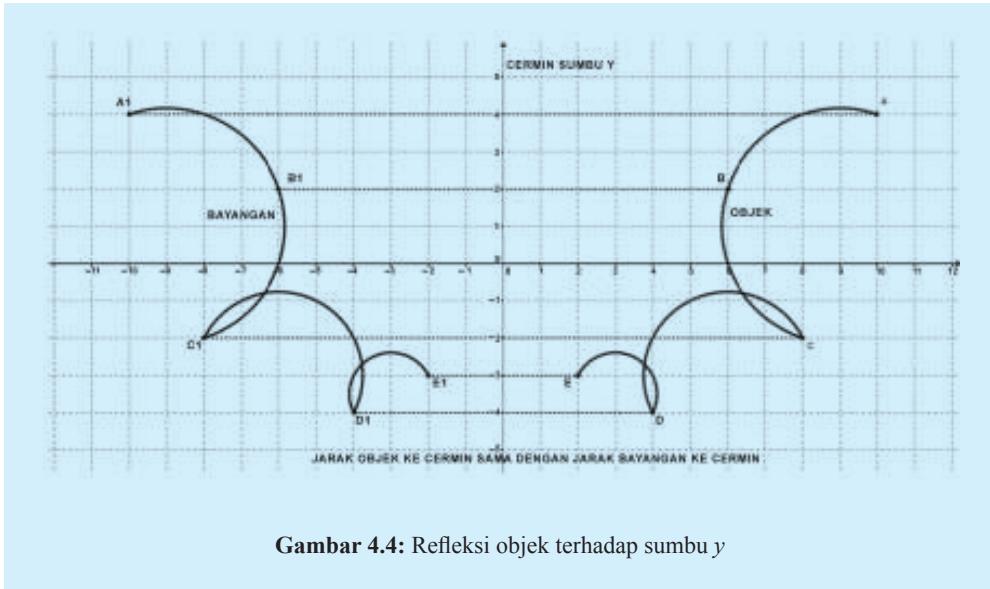
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ... \\ ... \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ... \\ ... \end{pmatrix}$$

Jadi, koordinat pergeseran titik R adalah $R'(..., ...)$.

4.2 Menemukan Konsep Refleksi (Pencerminan)

Setelah kamu menemukan konsep translasi, kamu akan belajar menemukan konsep refleksi atau pencerminan. Kita mulai dengan mengamati pencerminan objek-objek dalam kehidupan sehari-hari. Coba kamu amati dirimu pada saat bercermin (pada cermin datar). Tentu saja, kamu pernah melihat bayangan dirimu di cermin, seperti contoh bayangan dirimu di permukaan air, bayangan dirimu di kaca, dan lain-lain. Kalau kamu amati, jarak dirimu ke cermin akan sama dengan jarak bayanganmu ke cermin. Sekarang, kita juga akan mencoba mempelajari konsep pencerminan dengan pendekatan koordinat. Kita akan mengamati pencerminan objek pada bidang koordinat, dengan itu diasumsikan bahwa titik $O(0,0)$ dan garis (sumbu x, sumbu y, $y = x$, $y = –x$) adalah sebagai cermin.

Masalah 4.3

Perhatikan gambar berikut! Coba kamu amati objek yang dicerminkan terhadap sumbu y pada bidang koordinat kartesius. Kamu terfokus pada jarak objek ke cermin dan jarak bayangan ke cermin serta bentuk/ukuran objek dan bayangan.

Gambar 4.4: Refleksi objek terhadap sumbu *y*

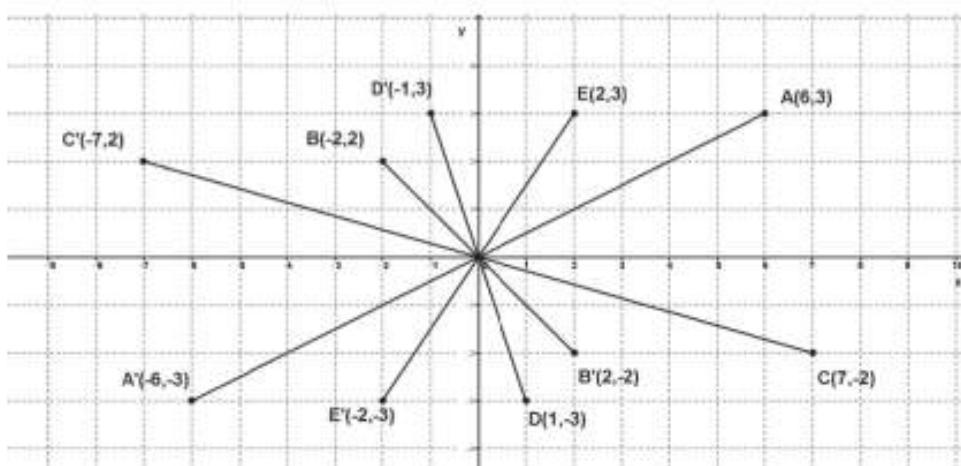
Apakah hasil pengamatanmu? Tentu saja, bentuk dan ukuran objek dan bayangannya tidak berubah, jarak objek ke cermin sama dengan jarak bayangannya ke cermin. Berdasarkan pengamatan pada Masalah 4.3 maka secara induktif diperoleh sifat pencerminan sebagai berikut.

Sifat 4.2

Bangun yang dicerminkan (refleksi) dengan cermin datar tidak mengalami perubahan bentuk dan ukuran. Jarak bangun dengan cermin (cermin datar) adalah sama dengan jarak bayangan dengan cermin tersebut.

Perhatikan konsep-konsep pencerminan dengan pendekatan koordinat berikut ini.

4.2.1 Pencerminan Terhadap Titik *O*(0,0)

Kita akan menemukan konsep pencerminan terhadap titik *O*(0,0) dengan melakukan eksperimen. Kamu amati pencerminan titik-titik pada gambar berikut.

Gambar 4.5: Refleksi titik terhadap titik *O*(0,0)

Perhatikan koordinat titik dan bayangannya setelah dicerminkan terhadap titik *O*(0,0) pada gambar berikut tersebut! Tuliskan koordinat titik-titik tersebut dan bayangannya pada tabel di bawah ini!

Tabel 4.2: Koordinat pencerminan titik terhadap titik *O*(0,0)

Titik	Koordinat Bayangan
A(6,3)	*A*'(–6,–3)
B(... , ...)	*B*'(... , ...)
C(... , ...)	*D*'(... , ...)
D(... , ...)	*E*'(... , ...)
E(... , ...)	*F*'(... , ...)

Berdasarkan pengamatan pada tabel, secara umum jika titik $A(x,y)$ dicerminkan terhadap titik $O(0,0)$ akan mempunyai koordinat bayangan $A'(-x,-y)$, bukan? Mari kita tentukan matriks pencerminan terhadap titik O(0,0). Misalkan matriks transformasinya adalah $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sehingga,

$$A(x,y) \xrightarrow{C_{O(0,0)}} A'(-x,-y)$$

$$\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

Dengan kesamaan matriks,

$-x = ax + by \Leftrightarrow a = -1$ dan $b = 0$

$-y = cx + dy \Leftrightarrow c = 0$ dan $d = -1$

Dengan demikian, matriks pencerminan terhadap titik $O(0,0)$ adalah $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Titik $A(x, y)$ dicerminkan terhadap titik $O(0, 0)$ menghasilkan bayangan $A'(x', y')$, ditulis dengan,

$$A(x,y) \xrightarrow{C_{O(0,0)}} A'(x',y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Contoh 4.3

Titik $A(1, 4)$ dicerminkan terhadap titik asal $O(0, 0)$, tentukan bayangan A!

Alternatif Penyelesaian:

$$A(1,4) \xrightarrow{C_{O(0,0)}} A'(x',y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Bayangan A adalah $A'(-1, -4)$

Contoh 4.4

Sebuah garis dengan persamaan $-2x + 4y - 1 = 0$ dicerminkan terhadap titik asal $O(0, 0)$. Tentukan persamaan bayangan garis tersebut!

Alternatif Penyelesaian:

Misalkan titik $A(x, y)$ memenuhi persamaan $-2x + 4y - 1 = 0$ sedemikian sehingga:

$$A(x,y) \xrightarrow{C_{O(0,0)}} A'(x',y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$

$$x' = -x \Leftrightarrow x = -x'$$

$$y' = -y \Leftrightarrow y = -y'$$

Jika x dan y disubstitusi ke garis maka ditemukan bayangannya yaitu:

$-2(-x) + 4(-y) - 1 = 0$ atau $2x - 4y - 1 = 0$

Latihan 4.2

Titik $A(2, -3)$ ditranslasikan dengan $T(-4, -5)$ kemudian dicerminkan terhadap titik O. Tentukan bayangan titik A tersebut.

Alternatif Penyelesaian:

$$A(2,-3) \xrightarrow{T_{(-4,-5)}} A'(x',y') \xrightarrow{C_{O(0,0)}} A''(x'',y'')$$

Langkah 1 (Proses translasi)

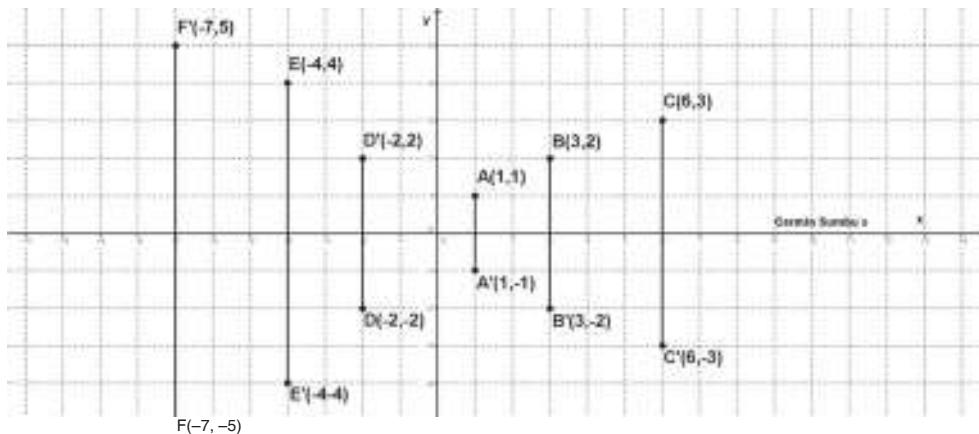
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ldots \\ \ldots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \ldots \\ \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ldots \\ \ldots \end{pmatrix}$$

Langkah 2 (Proses Refleksi)

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ldots \\ \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ldots \\ \ldots \end{pmatrix}$$

Jadi, bayangan titik A adalah $A''(\ldots, \ldots)$

4.2.2 Pencerminan Terhadap Sumbu *x*

Kita akan mencoba menemukan konsep pencerminan terhadap sumbu x dengan melakukan pengamatan pada pencerminan titik-titik. Secara induktif, kita akan menemukan pola. Perhatikan gambar berikut!

Gambar 4.6: Refleksi titik terhadap sumbu x

Coba kamu amati pencerminan beberapa titik terhadap sumbu x pada koordinat kartesius di atas, kemudian kamu tuliskan titik tersebut beserta bayangannya pada tabel di bawah ini!

Tabel 4.3: Koordinat pencerminan titik terhadap sumbu x

Titik	Koordinat Bayangan
$A(1, 1)$	$A'(1, -1)$
$B(\dots , \dots)$	$B'(\dots , \dots)$
$C(\dots , \dots)$	$C'(\dots , \dots)$
$D(\dots , \dots)$	$D'(\dots , \dots)$
$E(\dots , \dots)$	$E'(\dots , \dots)$
$F(\dots , \dots)$	$F'(\dots , \dots)$

Berdasarkan pengamatan pada tabel, secara umum, jika titik $A(x, y)$ dicerminkan terhadap sumbu x akan mempunyai koordinat bayangan $A'(x, -y)$, bukan? Mari kita tentukan matriks pencerminan terhadap sumbu x. Misalkan matriks transformasinya adalah $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sehingga,

$$A(x, y) \xrightarrow{Sumbu\, x} A'(x, -y)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} == \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

Dengan kesamaan matriks:

$x = ax + by \Leftrightarrow a = 1$ dan $b = 0$

$-y = cx + dy \Leftrightarrow c = 0$ dan $d = -1$

Dengan demikian, matriks pencerminan terhadap sumbu x adalah $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Titik $A(x, y)$ dicerminkan terhadap sumbu x menghasilkan bayangan $A'(x', y')$, ditulis dengan,

$$A(x, y) \xrightarrow{C_{sumbu\ x}} A'(x', y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Perhatikan penerapan konsep pencerminan terhadap sumbu x pada contoh berikut!

Contoh 4.5

Jika titik $A(-3, 3)$ dicerminkan terhadap sumbu x maka tentukan bayangan titik tersebut!

Alternatif Penyelesaian:

$$A(-3,3)\xrightarrow{C_{sumbu\ x}}A'(x',y')$$

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-3\end{pmatrix}$$

Jadi, bayangan titik A adalah $A'(-3, -3)$

Contoh 4.6

Jika garis $3x - 2y - 5 = 0$ dicerminkan terhadap sumbu x maka tentukan bayangan garis tersebut!

Alternatif Penyelesaian:

Misalkan titik $A(x, y)$ memenuhi persamaan $3x - 2y - 5 = 0$ sehingga,

$$A(x,y)\xrightarrow{C_{sumbu\ x}}A'(x',y')$$

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\-y\end{pmatrix}$$

$x' = x \Leftrightarrow x = x'$

$y' = -y \Leftrightarrow y = -y'$

Dengan mensubstitusi x dan y ke garis maka ditemukan bayangannya, $3(x) - 2(-y) - 5 = 0$ atau $3x + 2y - 5 = 0$

Latihan 4.3

Titik A(–2, –5) dicerminkan terhadap titik O kemudian dilanjutkan dengan pencerminan terhadap sumbu x. Tentukan bayangan titik A tersebut.

Alternatif Penyelesaian:

$$A(-2,-5)\xrightarrow{C_{O(0,0)}}A'(x',y')\xrightarrow{C_{sumbu\ x}}A''(x'',y'')$$

Langkah 1 (Proses Refleksi terhadap titik *O*)

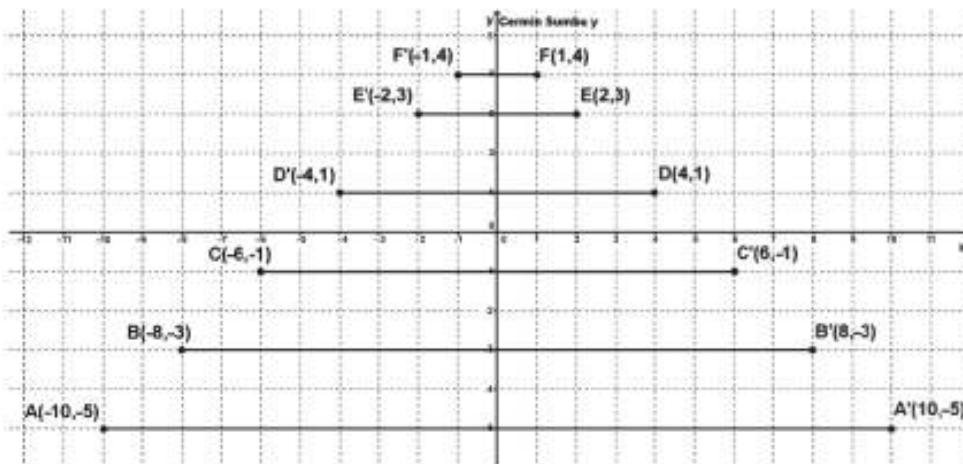
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \ldots \\ \ldots \end{pmatrix}$$

Langkah 2 (Proses Refleksi terhadap sumbu *x*)

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ldots \\ \ldots \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \ldots \\ \ldots \end{pmatrix}$$

Jadi, bayangan titik *A* adalah *A*″(…, …)

4.2.3 Pencerminan Terhadap Sumbu *y*

Kembali kita akan mengamati pola koordinat titik-titik dan bayangannya oleh pencerminan terhadap sumbu y. Dengan demikian, kita akan menemukan konsep pencerminan terhadap sumbu y. Perhatikan gambar berikut!

Gambar 4.7: Refleksi titik terhadap sumbu *y*

Coba kamu amati pencerminan beberapa titik terhadap sumbu *y* pada koordinat kartesius di atas, kemudian kamu tuliskan titik tersebut beserta bayangannya pada tabel di bawah ini!

Tabel 4.4: Koordinat pencerminan titik terhadap sumbu *y*

Titik	Koordinat Bayangan
A(–10, –5)	*A*'(10, –5)
B(... , ...)	*B*'(... , ...)
C(... , ...)	*C*'(... , ...)
D(... , ...)	*D*'(... , ...)
E(... , ...)	*E*'(... , ...)
F(... , ...)	*F*'(... , ...)

Berdasarkan pengamatan pada tabel, secara umum jika titik $A(x, y)$ dicerminkan terhadap sumbu y akan mempunyai koordinat bayangan $A'(-x, y)$. Misalkan matriks transformasinya adalah $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sehingga,

$$A(x, y) \xrightarrow{C_{sumbu\ y}} A'(-x, y)$$

$$\begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} == \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

Dengan kesamaan matriks,

$-x = ax + by \Leftrightarrow a = \ldots.$ dan $b = \ldots.$

$y = cx + dy \Leftrightarrow c = \ldots.$ dan $d = \ldots.$

Dengan demikian, matriks pencerminan terhadap sumbu y adalah $\begin{pmatrix} \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{pmatrix}$

Titik $A(x, y)$ dicerminkan terhadap sumbu y menghasilkan bayangan $A'(x', y')$, ditulis dengan,

$$A(x, y) \xrightarrow{C_{sumbu\ y}} A'(x', y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Contoh 4.7

Jika titik $A(-3, -4)$ dicerminkan terhadap sumbu y maka tentukanlah bayangan titik tersebut!

Alternatif Penyelesaian:

$$A(-3,-4) \xrightarrow{C_{sumbu\ y}} A'(x',y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Jadi, bayangan titik A adalah $A'(3,-4)$

Contoh 4.8

Jika garis $3x - 2y - 5 = 0$ dicerminkan terhadap sumbu y maka tentukan bayangan garis tersebut!

Alternatif Penyelesaian:

Misalkan titik $A(x,y)$ memenuhi persamaan $3x - 2y - 5 = 0$ sehingga,

$$A(x,y) \xrightarrow{C_{sumbu\ y}} A'(x',y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$

$$x' = -x \Leftrightarrow x = -x'$$

$$y' = y \Leftrightarrow y = y'$$

Dengan mensubstitusi x dan y ke garis maka ditemukan bayangannya, $3(-x) - 2(y) - 5 = 0$ atau $3x + 2y + 5 = 0$

Latihan 4.4

Garis $2x - y + 5 = 0$ dicerminkan terhadap titik $O(0,0)$ kemudian dilanjutkan dengan pencerminan terhadap sumbu y. Tentukan persamaan bayangan garis tersebut.

Alternatif Penyelesaian:

Misalkan titik $A(x, y)$ terletak pada garis tersebut, sehingga:

$$A(x,y)\xrightarrow{C_{O(0,0)}}A'(x',y')\xrightarrow{C_{sumbu\ y}}A''(x'',y'')$$

Langkah 1 (Proses pencerminan terhadap titik $O(0, 0)$)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

Langkah 2 (Proses pencerminan terhadap sumbu y)

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

sehingga:

$x'' = \dots$ dan $y'' = \dots$

Langkah 4 (Proses menentukan persamaan bayangan)

Tentukan x dan y dalam bentuk x dan y

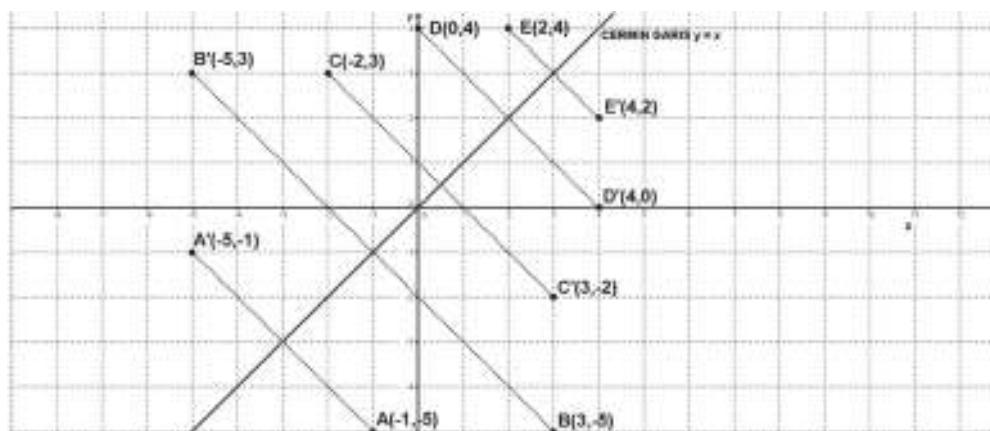
$x = \dots$ dan $y = \dots$

Langkah 5 (Proses menentukan persamaan bayangan)

Substitusi x dan y ke $2x – y + 5 = 0$ sehingga diperoleh persamaan bayangan.

$2(\dots) – (\dots) + 5 = 0$

4.2.4 Pencerminan Terhadap Garis $y = x$

Kita akan mencoba menemukan konsep pencerminan terhadap garis $y = x$ dengan melakukan pengamatan pada pencerminan titik-titik. Secara induktif, kita akan menemukan pola. Perhatikan gambar berikut!

Gambar 4.8: Refleksi titik terhadap garis $y = x$

Coba kamu amati pencerminan beberapa titik terhadap garis $y = x$ pada koordinat kartesius di atas, kemudian kamu tuliskan koordinat titik tersebut beserta bayangannya pada tabel di bawah ini!

Tabel 4.5: Koordinat pencerminan titik terhadap garis $y = x$

Titik	Koordinat Bayangan
$A(-1, -5)$	$A'(-5, -1)$
$B(\ldots , \ldots)$	$B'(\ldots , \ldots)$
$C(\ldots , \ldots)$	$C'(\ldots , \ldots)$
$D(\ldots , \ldots)$	$D'(\ldots , \ldots)$
$E(\ldots , \ldots)$	$E'(\ldots , \ldots)$

Berdasarkan pengamatan pada tabel, secara umum jika titik $A(x, y)$ dicerminkan terhadap garis $y = x$ akan mempunyai koordinat bayangan $A'(y, x)$, bukan? Mari kita tentukan matriks pencerminan terhadap garis $y = x$. Misalkan matriks transformasinya adalah $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sehingga,

$$A(x, y) \xrightarrow{C_{y=x}} A'(y, x)$$

$$\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

Dengan kesamaan matriks,

$y = ax + by \Leftrightarrow a = 0$ dan $b = 1$

$x = cx + dy \Leftrightarrow c = 1$ dan $d = 0$

Dengan demikian, matriks pencerminan terhadap garis $y = x$ adalah $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Titik $A(x, y)$ dicerminkan terhadap garis $y = x$ menghasilkan bayangan $A'(x', y')$, ditulis dengan,

$$A(x, y) \xrightarrow{C_{y=x}} A'(x', y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Dimana matriks pencerminan terhadap garis $y = x$ adalah $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Contoh 4.9

Jika titik $A(-1, 2)$ dicerminkan terhadap garis $y = x$ maka tentukanlah bayangan titik tersebut!

Alternatif Penyelesaian:

$$A(-1, 2) \xrightarrow{C_{y=x}} A'(x', y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Jadi, bayangan titik A adalah $A'(2, -1)$

Contoh 4.10

Jika garis $4x - 3y + 1 = 0$ dicerminkan terhadap garis $y = x$ maka tentukan bayangan garis tersebut!

Alternatif Penyelesaian:

Misalkan titik $A(x, y)$ memenuhi persamaan $4x - 3y + 1 = 0$ sehingga,

$$A(x,y)\xrightarrow{C_{y=x}} A'(x',y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

$x' = y \Leftrightarrow y = x'$

$y' = x \Leftrightarrow x = y'$

Dengan mensubstitusi x dan y ke garis maka ditemukan bayangannya, $4(y) - 3(x) + 1 = 0$ atau $-3(x) + 4y + 1 = 0$

Latihan 4.5

Titik $A(-1, -3)$ dicerminkan terhadap titik $O(0, 0)$ kemudian dilanjutkan dengan pencerminan terhadap sumbu y dan dilanjutkan lagi dengan pencerminan terhadap garis $y = x$. Tentukan bayangan titik A tersebut.

Alternatif Penyelesaian:

$$A(-1,-3)\xrightarrow{C_{O(0,0)}} A'(x',y')\xrightarrow{C_{sumbu\ y}} A''(x'',y'')\xrightarrow{C_{y=x}} A'''(x''',y''')$$

Langkah 1 (Proses pencerminan terhadap titik $O(0,0)$)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

Langkah 2 (Proses pencerminan terhadap sumbu y)

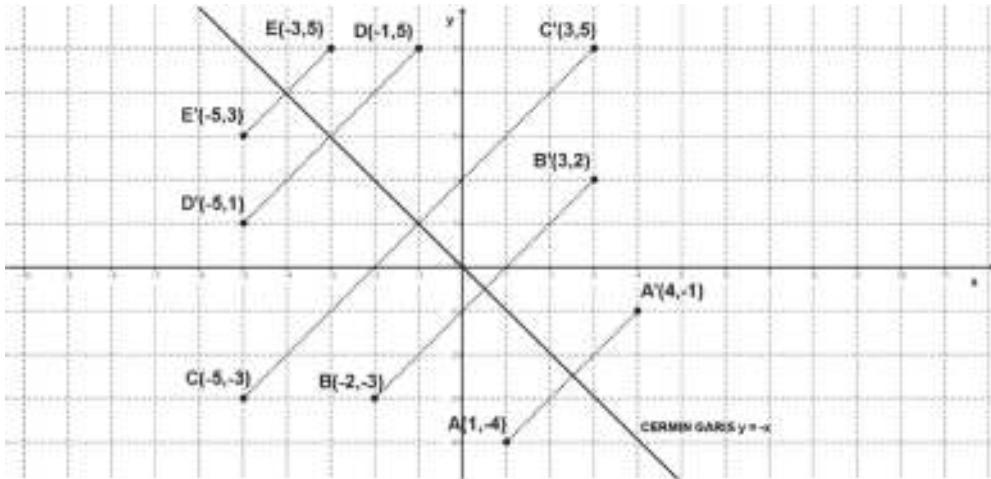
$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

Langkah 3 (Proses pencerminan terhadap garis $y = x$)

$$\begin{pmatrix} x''' \\ y''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

Jadi, bayangan titik A adalah $A'''(\dots, \dots)$

4.2.5 Pencerminan Terhadap Garis $y = -x$

Kita akan mencoba menemukan konsep pencerminan terhadap garis $y = -x$ dengan melakukan pengamatan pada pencerminan titik-titik. Secara induktif, kita akan menemukan pola. Perhatikan gambar berikut!

Gambar 4.9: Pencerminan titik terhadap garis $y = -x$

Coba kamu amati pencerminan beberapa titik terhadap garis $y = -x$ pada koordinat kartesius di atas, kemudian kamu tuliskan koordinat titik tersebut beserta bayangannya pada tabel di bawah ini!

Tabel 4.6: Koordinat pencerminan titik terhadap garis $y = -x$

Titik	Bayangannya
$A(1, -4)$	$A'(4, -1)$
$B(\ldots , \ldots)$	$B'(\ldots , \ldots)$
$C(\ldots , \ldots)$	$C'(\ldots , \ldots)$
$D(\ldots , \ldots)$	$D'(\ldots , \ldots)$
$E(\ldots , \ldots)$	$E'(\ldots , \ldots)$

Berdasarkan pengamatan pada tabel, secara umum jika titik $A(x, y)$ dicerminkan terhadap garis $y = -x$ akan mempunyai koordinat bayangan $A'(-y, -x)$, bukan? Mari kita tentukan matriks pencerminan terhadap garis $y = -x$. Misalkan matriks transformasinya adalah $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sehingga,

$$A(x,y)\xrightarrow{C_{y=-x}}A'(-y,-x)$$

$$\begin{pmatrix}-y\\-x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\ldots\\\ldots\end{pmatrix}$$

Dengan kesamaan matriks,

$-y = \ldots \Leftrightarrow a = \ldots$ dan $b = \ldots$

$-x = \ldots \Leftrightarrow c = \ldots$ dan $d = \ldots$

Dengan demikian, matriks pencerminan terhadap garis $y = -x$ adalah $\begin{pmatrix}\ldots & \ldots\\\ldots & \ldots\end{pmatrix}$.

> Titik $A(x, y)$ dicerminkan terhadap garis $y = -x$ menghasilkan bayangan $A'(x', y')$, ditulis dengan,
>
> $$A(x,y)\xrightarrow{C_{y=-x}}A'(x',y')$$
>
> $$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

Contoh 4.11

Jika titik $A(1, 2)$ dicerminkan terhadap garis $y = -x$ maka tentukanlah bayangan titik tersebut!

Alternatif Penyelesaian:

$$A(1,2)\xrightarrow{C_{y=-x}}A'(x',y')$$

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$$

Jadi, bayangan titik A adalah $A'(-2,-1)$

Contoh 4.12

Jika garis $4x - 3y + 1 = 0$ dicerminkan terhadap garis $y = -x$ maka tentukan bayangan garis tersebut!

Alternatif Penyelesaian:

Misalkan titik A(x,y) memenuhi persamaan $4x - 3y + 1 = 0$ sehingga:

$$A(x, y)\xrightarrow{C_{y=-x}} A'(x', y')$$

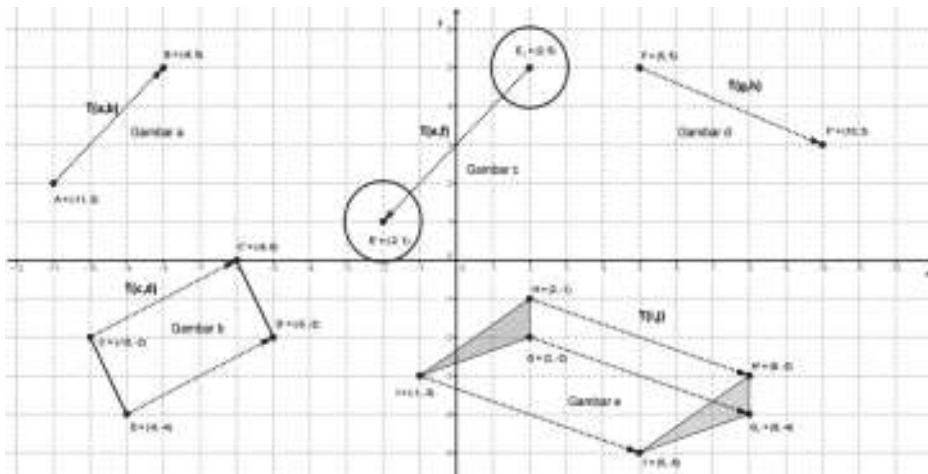
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix}$$

$$x' = -y \Leftrightarrow y = -x'$$

$$y' = -x \Leftrightarrow x = -y'$$

Dengan mensubstitusi x dan y ke garis maka ditemukan bayangannya, $4(-y) - 3(-x) + 1 = 0$ atau $3x - 4y + 1 = 0$.

Uji Kompetensi 4.1

1. Perhatikan gambar!

Berdasarkan gambar, tentukan translasi T yang menggeser masing-masing objek tersebut!

2. Tunjukkan dengan gambar pada bidang koordinat kartesius, pergeseran objek berikut oleh translasi T:
   a. Titik $A(–3, –4)$ ditranslasi oleh $T(5, 7)$
   b. Ruas garis AB dengan $A(–1, 1)$ dan $B(2, –3)$ ditranslasi oleh $T(–2, 4)$
   c. Segitiga ABC dengan $A(–3, –1)$, $B(–1, 2)$, dan $C(0, –4)$ ditranslasi oleh $T(5, 5)$
   d. Garis $2y – 3x + 6 = 0$ ditranslasi oleh $T(4, –1)$
   e. Lingkaran dengan pusat di $P(1, –1)$ dan radius 2 satuan ditranslasi oleh $T(5, –5)$

3. Tentukan koordinat hasil pergeseran titik oleh translasi T berikut:
   a. Titik $A(–2, 5)$ oleh translasi $T_1(–1, –3)$ dilanjutkan dengan translasi $T_2(0, 5)$
   b. Titik $B(1, –3)$ oleh translasi $T_1(–2, –4)$ dilanjutkan dengan translasi $T_2(–2, –4)$
   c. Titik $C(–3, 2)$ oleh translasi $T_1(–1, 5)$ dilanjutkan dengan translasi $T_2(–1,4)$
   d. Titik $D(4, 5)$ oleh translasi $T_1(–1, –2)$ dilanjutkan dengan translasi $T_2(–1, –3)$
   e. Titik $D(1, 3)$ oleh translasi $T_1(1, 3)$ dilanjutkan dengan translasi $T_2(1, 3)$

4. Tentukan koordinat titik asal oleh translasi T berikut.
   a. Titik $A(x, y)$ ditranslasi oleh $T(–1, –6)$ menjadi $A'(7, –4)$
   b. Titik $B(x, y)$ ditranslasi oleh $T(1, 5)$ menjadi $B'(–10, –2)$
   c. Titik $C(x, y)$ ditranslasi oleh $T(–4, 6)$ menjadi $C'(10, –3)$
   d. Titik $D(x, y)$ ditranslasi oleh $T(–5, –9)$ menjadi $D'(5, 9)$
   e. Titik $E(x, y)$ ditranslasi oleh $T(–1, –6)$ menjadi $E'(1, 6)$

5. Dengan menggunakan konsep, tentukan hasil pergeseran fungsi-fungsi berikut oleh translasi T.
   a. Garis $y = 2$ ditranslasi oleh $T(1, –1)$
   b. Garis $2y – 3x + 6 = 0$ ditranslasi oleh $T(4, –1)$
   c. Parabola $y = x^2 – 3x + 2$ ditranslasi oleh $T(2, 1)$
   d. Parabola $x = y^2 – 2x – 2$ ditranslasi oleh $T(–2, 2)$
   e. Lingkaran $x^2 + y^2 – 2x + 2y – 3 = 0$ ditranslasi oleh $T(–3, –2)$

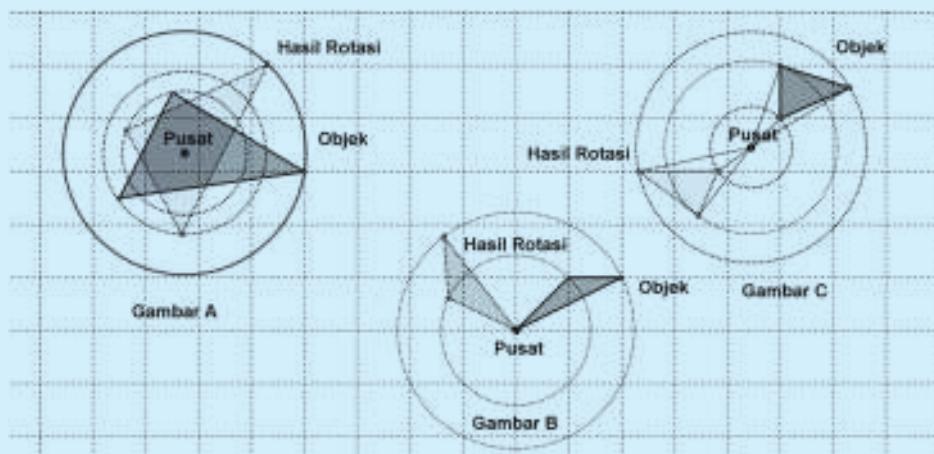
6. Tunjukkan dengan gambar pencerminaan objek pada bidang koordinat kartesius berikut:
   a. Titik $A(3, -4)$ dicerminkan terhadap titik $O(0, 0)$
   b. Titik $B(-1, -2)$ dicerminkan terhadap titik sumbu x
   c. Titik $C(-5, 2)$ dicerminkan terhadap titik sumbu y
   d. Titik $D(1, -5)$ dicerminkan terhadap titik sumbu $y = x$
   e. Titik $E(2, 4)$ dicerminkan terhadap titik sumbu $y = -x$
   f. Ruas garis AB dengan $A(-2, -1)$ dan $B(2, 5)$ dicerminkan terhadap titik $O(0, 0)$
   g. Segitiga ABC dengan $A(-3, -1)$, $B(-1, 2)$ dan $C(0, -4)$ dicerminkan terhadap sumbu x
   h. Garis $2y - 3x + 6 = 0$ dicerminkan terhadap sumbu y
   i. Parabola $y = x^2 + 6$ dicerminkan terhadap garis $y = x$
   j. Garis $y = 2x + 3$ dicerminkan terhadap $y = -x$

7. Dengan menggunakan konsep refleksi, tentukan hasil pencerminan fungsi-fungsi berikut!
   a. Garis $y = 2$ dicerminkan terhadap titik $O(0, 0)$
   b. Garis $2y - 3x + 6 = 0$ dicerminkan terhadap sumbu x.
   c. Parabola $y = x^2 - 3x + 2$ dicerminkan terhadap sumbu y.
   d. Parabola $x = y^2 - 2y - 2$ dicerminkan terhadap garis $y = x$.
   e. Lingkaran $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 3 = 0$ dicerminkan terhadap garis $y = -x$.

4.3 Menemukan Konsep Rotasi (Perputaran)

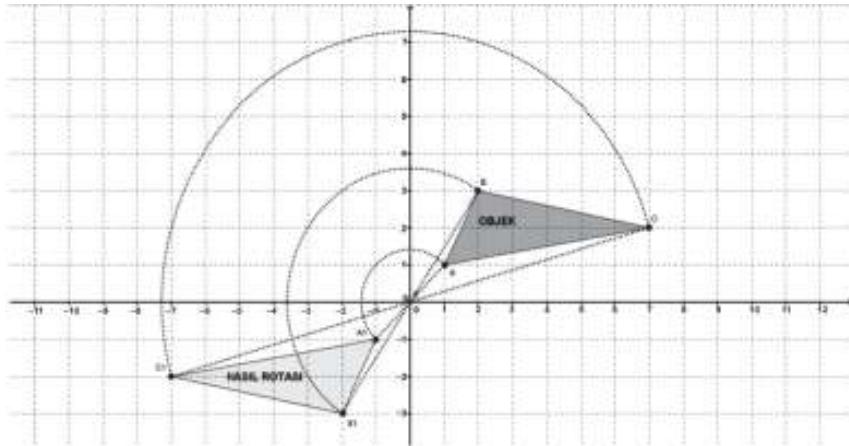
Coba kamu amati lingkungan sekitarmu! Objek apa yang bergerak berputar? Banyak contoh objek yang bergerak berputar, seperti: jarum jam bergerak berputar menunjukkan angka, kincir angin, kipas angin, dan lain-lain. Pada kesempatan ini, kita akan membahas gerak berputar (rotasi) suatu objek dengan sudut putaran dan pusat putaran pada bidang koordinat. Perhatikan Gambar!

Masalah 4.4

Coba kamu perhatikan gambar berikut!

Gambar 4.10: Rotasi objek dengan pusat rotasi berbeda

Berikan komentarmu tentang perputaran setiap objek tersebut!

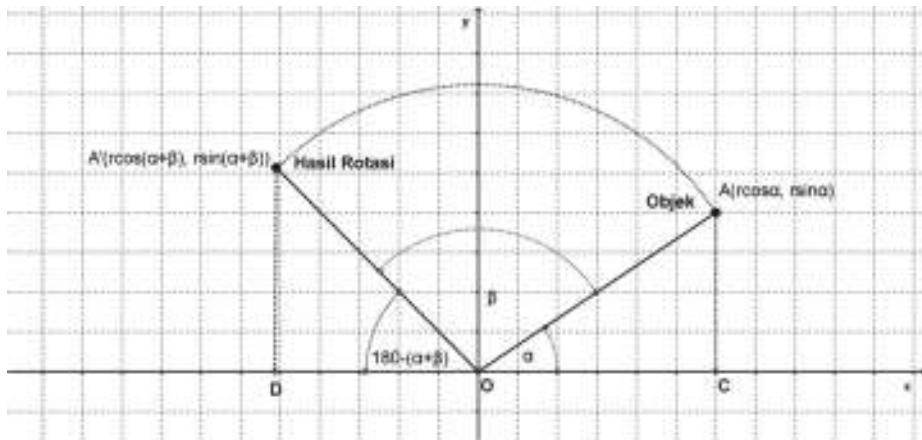
Pada gambar terdapat tiga objek (segitiga) yang diputar dengan sudut putaran tertentu. Hasil putaran akan bergantung pada pusat putaran dan besar sudut putaran, bukan. Gambar A adalah putaran objek dengan sudut putaran berada pada objek itu sendiri. Gambar B adalah putaran objek dengan pusat berada di ujung/pinggir objek itu sendiri dan Gambar C menunjukkan putaran objek dengan pusat putaran berada di luar objek itu. Namun, bentuk dan ukuran objek tidak berubah setelah mengalami rotasi.

Perhatikan gambar berikut!

Gambar 4.11: Rotasi objek pada pusat $O(0,0)$

Dengan demikian, secara induktif diperoleh sifat rotasi sebagai berikut:

Sifat 4.3

Bangun yang diputar (rotasi) tidak mengalami perubahan bentuk dan ukuran.

Berikutnya, kita akan melakukan percobaan kembali untuk mendapatkan konsep rotasi. Perhatikan pergerakan titik pada gambar berikut:

Gambar 4.12: Rotasi Titik dengan sudut β dan Pusat $O(0,0)$

Kamu masih ingat konsep trigonometri, bukan? Pada segitiga *OCA*, koordinat objek adalah $A(r \cos \alpha, r \sin \alpha)$. Diputar sebesar sudut β dan Pusat $O(0, 0)$ sehingga posisi objek menjadi di koordinat $A'(r \cos(\alpha + \beta), r \sin(\alpha + \beta))$. Dengan demikian, kita akan mencoba mencari konsep rotasi.

Misalkan matriks rotasi adalah $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sehingga:

$$A(x, y) \xrightarrow{Rotasi} A'(x', y')$$

$$A(r \cos \alpha, r \sin \alpha) \xrightarrow{Rotasi} A'(r \cos(\alpha + \beta), r \sin(\alpha + \beta))$$

$$\begin{pmatrix} r \cos(\alpha + \beta) \\ r \sin(\alpha + \beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \cos \alpha \\ r \sin \alpha \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} ar \cos \alpha + br \sin \alpha \\ cr \cos \alpha + dr \sin \alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos \alpha + b \sin \alpha \\ c \cos \alpha + d \sin \alpha \end{pmatrix}$$

Ini berarti

$a = \cos \beta, b = -\sin \beta$ dan $c = \sin \beta, d = \cos \beta$

Dengan demikian, matriks rotasi sebesar sudut β dan pusat rotasi $O(0, 0)$ adalah

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Bagaimana jika pusat rotasi di titik $P(p, q)$? Kamu boleh menggeser (translasi) terlebih dahulu pusat rotasi ke titik $O(0, 0)$ kemudian terjadi proses rotasi kemudian ditranslasi kembali sejauh pusat rotasi sebelumnya.

Titik $A(x, y)$ diputar dengan pusat $P(p, q)$ dan sudut α menghasilkan bayangan $A'(x', y')$, ditulis dengan,

$$A(x, y) \xrightarrow{R_{[P(p,q),\alpha]}} A'(x', y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - p \\ y - q \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

Matriks rotasi dengan sudut α (berlawanan arah jarum jam) adalah $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

Ingat, sudut α dihitung berlawanan arah jarum jam, sebaliknya adalah –α (searah jarum jam).

Contoh 4.13

Jika titik $A(-2, 3)$ dirotasi dengan pusat $O(0, 0)$ dan sudut 90^0 berlawanan arah jarum jam maka tentukanlah bayangan titik tersebut!

Alternatif Penyelesaian:

$$A(-2,3) \xrightarrow{R_{[O(0,0),90^\circ]}} A'(x',y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} == \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Jadi, bayangan titik A adalah $A'(-3,-2)$

Contoh 4.14

Jika garis $x - 2y + 3 = 0$ dirotasi dengan pusat $P(1, -1)$ dan sudut 180^0 searah jarum jam maka tentukanlah bayangan garis tersebut!

Alternatif Penyelesaian:

Misalkan titik $A(x, y)$ memenuhi persamaan $x - 2y + 3 = 0$ sehingga,

$$A(x,y) \xrightarrow{R_{[P(1,-1),-180^\circ]}} A'(x',y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} =+ \begin{pmatrix} \cos(-180^\circ) & -\sin(-180^\circ) \\ \sin(-180^\circ) & \cos(-180^\circ) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-(-1) \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} =+ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-(-1) \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+1 \\ -y-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

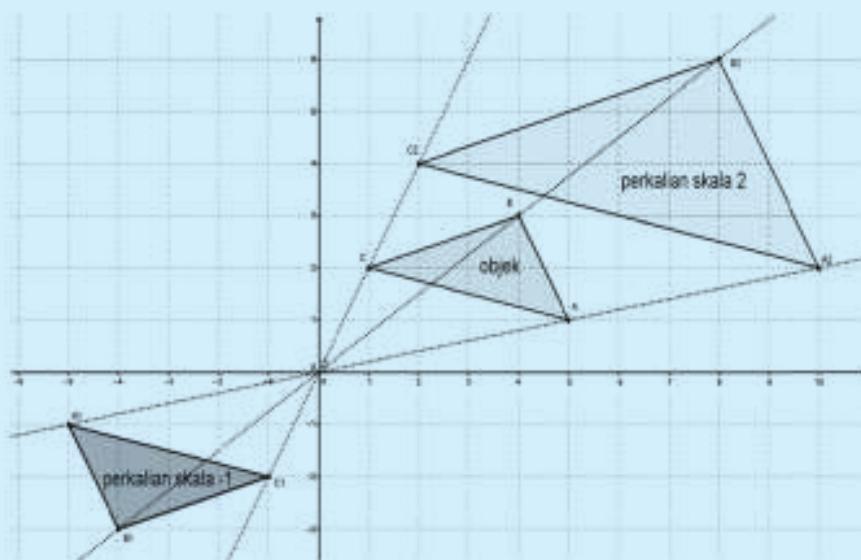
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+2 \\ -y-2 \end{pmatrix}$$

$x' = -x + 2 \Leftrightarrow x = 2 - x'$
$y' = -y - 2 \Leftrightarrow y = -y' - 2$
Dengan mensubstitusi x dan y ke garis maka ditemukan bayangannya, $(2 - x) - 2(-y - 2) + 3 = 0$ atau $x - 2y - 9 = 0$.

4.4 Menemukan Konsep Dilatasi (Perkalian)

Coba kamu berikan contoh perkalian (dilatasi) yang terjadi di lingkungan sekitarmu? Sebagai contoh, balon yang ditiup akan mengembang, karet gelang dapat direnggang, dan lain-lain. Semua itu membicarakan perkalian ukuran objek. Tetapi, pada kesempatan ini, kita akan membahas konsep perkalian objek dengan pendekatan koordinat.

Masalah 4.5

Coba amati gambar berikut. Berikan pendapatmu?

Gambar 4.13: Dilatasi objek pada pusat $O(0, 0)$

Jika diamati, kamu melihat ukuran objek akan semakin besar dengan perkalian skala 2. Kemudian, jarak OA2 adalah dua kali OA, jarak OB2 adalah dua kali OB dan jarak OC2 adalah dua kali OC. Tetapi bangun setelah perkalian dengan faktor skala –1 mempunyai besar dan ukuran yang sama tetapi mempunyai arah yang berlawanan. Perhatikan juga, jarak OA1 sama dengan jarak OA, jarak OB1 adalah sama dengan jarak OB dan jarak OC1 adalah sama dengan jarak OC.

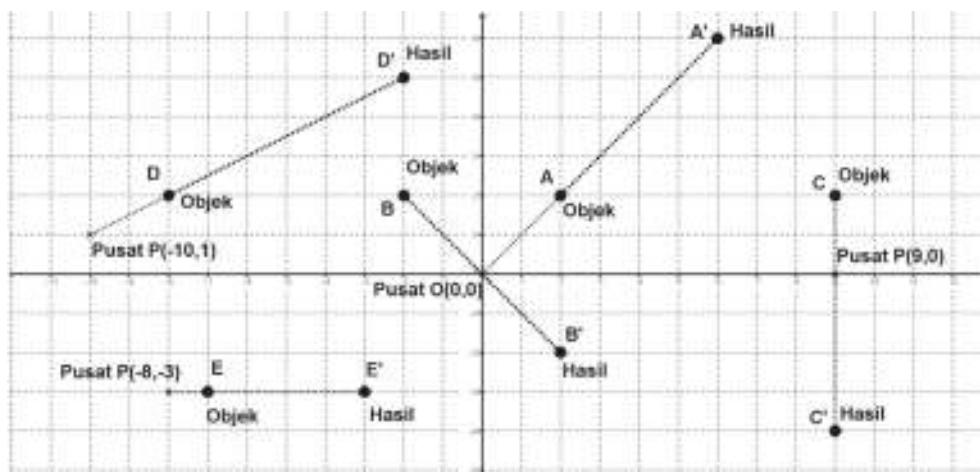
Hal ini berarti, untuk melakukan perkalian/dilatasi, dibutuhkan unsur faktor perkalian dan pusat perkalian.

Dengan mengamati perkalian objek, dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

Sifat 4.4

Bangun yang diperbesar atau diperkecil (dilatasi) dengan skala k dapat mengubah ukuran atau tetap ukurannya tetapi tidak mengubah bentuk.

- ❖ Jika $k > 1$ maka bangun akan diperbesar dan terletak searah terhadap pusat dilatasi dengan bangun semula.
- ❖ Jika $k = 1$ maka bangun tidak mengalami perubahan ukuran dan letak.
- ❖ Jika $0 < k < 1$ maka bangun akan diperkecil dan terletak searah terhadap pusat dilatasi dengan bangun semula.
- ❖ Jika $-1 < k < 0$ maka bangun akan diperkecil dan terletak berlawanan arah terhadap pusat dilatasi dengan bangun semula.
- ❖ Jika $k = -1$ maka bangun tidak akan mengalami perubahan bentuk dan ukuran dan terletak berlawanan arah terhadap pusat dilatasi dengan bangun semula.
- ❖ Jika $k < -1$ maka bangun akan diperbesar dan terletak berlawanan arah terhadap pusat dilatasi dengan bangun semula.

Berikutnya, amati dilatasi titik-titik pada gambar berikut.

Gambar 4.14: Dilatasi titik dengan pusat $P(a, b)$

Kamu amati titik pusat, objek, dan hasil dilatasi objek. Amati juga jarak objek ke pusat dan jarak hasil dilatasi ke pusat pada bidang koordinat di atas.

Coba kamu lengkapi tabel berikut dan tentukan pola atau konsep melalui langkah-langkah berikut!

Tabel 4.7: Dilatasi titik pada pusat $P(a, b)$ dan skala k

No.	Pusat	Objek	Hasil	Pola
1.	$P(0, 0)$	$A(2, 2)$	$A'(6, 6)$	$\begin{pmatrix}6\\6\end{pmatrix}=3\left(\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right)+\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$
2.	$P(0, 0)$	$B(-2, 2)$	$B'(\ldots,\ldots)$	...
3.	$P(9, 0)$	$C(\ldots,\ldots)$	$C'(9, -4)$	...
4.	$P(-10, 1)$	$D(-8, 2)$	$D'(-2, 5)$	$\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}=4\left(\begin{pmatrix}-8\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-10\\1\end{pmatrix}\right)+\begin{pmatrix}-10\\1\end{pmatrix}$
5.	$P(-8, -3)$	$E(\ldots,\ldots)$	$E'(\ldots,\ldots)$	...

Secara indukif, diperoleh kesimpulan berikut:

> Titik $A(x, y)$ didilatasi dengan pusat $P(p, q)$ dan skala k menghasilkan bayangan $A'(x', y')$, ditulis dengan,
>
> $$A(x, y) \xrightarrow{D_{[P(p,q),k]}} A'(x', y')$$
>
> $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} x-p \\ y-q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

Contoh 4.15

Jika titik $A(–2, 3)$ didilatasi dengan pusat $O(0, 0)$ dan skala 3 maka tentukanlah bayangan titik tersebut!

Alternatif Penyelesaian:

$$A(-2, 3) \xrightarrow{D_{[O(0,0),3]}} A'(x', y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Jadi, bayangan titik A adalah $A'(–6, 9)$

Contoh 4.16

Jika garis $2x – 4y + 3 = 0$ didilatasi dengan pusat $P(1, –1)$ dan skala –2 maka tentukanlah bayangan garis tersebut!

Alternatif Penyelesaian:

Misalkan titik $A(x, y)$ memenuhi persamaan $2x – 4y + 3 = 0$ sehingga,

$$A(x, y) \xrightarrow{D_{[P(1,-1),-2]}} A'(x', y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ - \\ y' \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x-1 \\ + \\ y-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2x+3 \\ -2y-3 \end{pmatrix}$$

$$x' = -2x + 3 \Leftrightarrow x = \frac{3-x'}{2}$$

$$y' = -2y - 3 \Leftrightarrow y = \frac{-3-y'}{2}$$

Dengan mensubstitusi x dan y ke garis maka ditemukan bayangannya, $2(\frac{3-x}{2}) - 4(\frac{-3-y}{2}) + 3 = 0$ atau $-x + 2y + 12 = 0$

Uji Kompetensi 4.2

1. Tentukan koordinat titik-titik oleh rotasi R dengan sudut α dan pusat P serta arah rotasi sebagai berikut:

No.	Titik	Sudut	Arah	Pusat
a.	$A(2, 1)$	$\alpha = 90^0$	Berlawanan arah jarum jam	$P(0, 0)$
b.	$B(-1, 3)$	$\alpha = 90^0$	Searah jarum jam	$P(1, 1)$
c.	$C(-2, -1)$	$\alpha = 180^0$	Berlawanan arah jarum jam	$P(2, -1)$
d.	$D(3, -5)$	$\alpha = 270^0$	Berlawanan arah jarum jam	$P(-2, 3)$
e.	$E(2, 2)$	$\alpha = 45^0$	Searah jarum jam	$P(-1, -2)$

2. Tentukan bentuk persamaan oleh dilatasi R dengan sudut α dan pusat P serta arah rotasi sebagai berikut:

No.	Fungsi	Sudut	Arah	Pusat
a.	$2y - 3x + 6 = 0$	$\alpha = 90^0$	Searah jarum jam	$P(0, 0)$
b.	$3y - 4x - 6 = 0$	$\alpha = 90^0$	Berlawanan arah jarum jam	$P(1, 1)$
c.	$y = x^2 - 2x + 6$	$\alpha = 180^0$	Berlawanan arah jarum jam	$P(2, -1)$
d.	$y = -2x^2 - x + 2$	$\alpha = 270^0$	Berlawanan arah jarum jam	$P(-2, 3)$
e.	$x^2 + y^2 - 4 = 0$	$\alpha = 45^0$	Searah jarum jam	$P(-1, -2)$

3. Tentukan koordinat titik-titik oleh dilatasi D dengan skala k dan pusat P berikut:

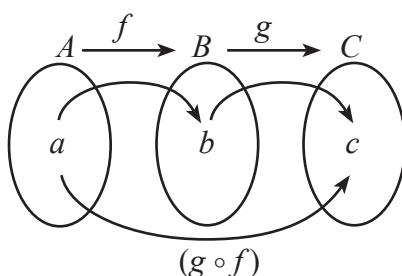
No.	Titik	Skala	Pusat
a.	$A(2, 1)$	$k = 2$	$P(0, 0)$
b.	$B(-1, 3)$	$k = -2$	$P(1, 1)$
c.	$C(-2, -1)$	$k = 3$	$P(2, -1)$
d.	$D(3, -5)$	$k = -1$	$P(-2, 3)$
e.	$E(2, 2)$	$k = 2$	$P(-1, -2)$

4. Tentukan bentuk persamaan oleh dilatasi D dengan skala k dan pusat P berikut:

No.	Fungsi	Skala	Pusat
a.	$2y - 3x + 6 = 0$	$k = 2$	$P(0, 0)$
b.	$3y - 4x - 6 = 0$	$k = -2$	$P(1, 1)$
c.	$y = x^2 - 2x + 6$	$k = 3$	$P(2, -1)$
d.	$y = -2x^2 - x + 2$	$k = -1$	$P(-2, 3)$
e.	$x^2 + y^2 - 4 = 0$	$k = 2$	$P(-1, -2)$

5. Titik $A(2, 3)$ di rotasi sejauh 270^0 pada pusat $O(0, 0)$ kemudian dilanjutkan dengan dilatasi pada skala –2 dengan pusat dilatasi $P(1, -1)$. Sketsa transformasi tersebut dan tentukan koordinat akhir titik A.

4.5 Komposisi Transformasi

Selanjutnya, kita akan membahas komposisi transformasi. Ingat, transformasi merupakan fungsi sehingga konsep komposisi transformasi sama halnya dengan komposisi fungsi pada umumnya yang telah kamu pelajari sebelumnya di kelas X.

Gambar 4.15 Fungsi komposisi $(g \circ f)$

Berdasarkan gambar di atas, fungsi f memetakan anggota domain ke tepat satu anggota kodomain pertama (Himpunan B), kemudian fungsi g akan melanjutkan pemetaan ke anggota kodomain kedua (Himpunan C). Sementara fungsi komposisi $(g \circ f)$ akan memetakan anggota domain (Himpunan A) secara langsung ke kodomain kedua (Himpunan C). Sekarang, bagaimana jika fungsinya berupa transformasi geometri seperti translasi, refleksi, rotasi dan dilatasi? Coba kamu pahami masalah berikut:

Masalah 4.6

Misalkan sembarang titik $A(x, y)$ ditranslasikan dengan $T_1(a_1, b_1)$ kemudian dilanjutkan dengan translasi $T_2(a_2, b_2)$. Tentukan koordinat akhir titik A tersebut!

Alternatif Penyelesaian:

Sesuai dengan konsep translasi, maka persoalan ini dapat diselesaikan secara bertahap.Namun, proses translasi bertahap ini dapat melahirkan konsep komposisi translasi. Coba kamu amati!

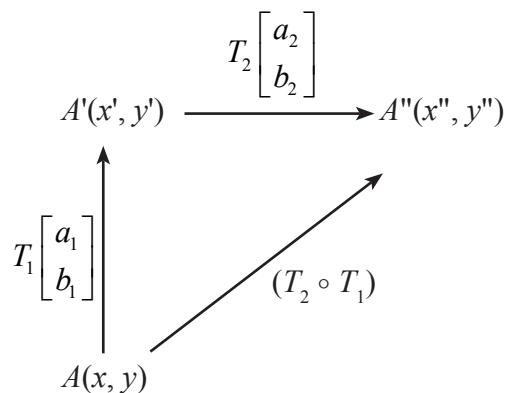
$$A(x,y)\xrightarrow{T_1\begin{pmatrix}a_1\\b_1\end{pmatrix}}A'(x',y')\xrightarrow{T_2\begin{pmatrix}a_2\\b_2\end{pmatrix}}A''(x'',y'')$$

$$\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_2\\b_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\text{ dimana }\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\b_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_2\\b_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_1\\b_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix}=M_{T_2}+M_{T_1}+\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix}=M_{T_2\circ T_1}+\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\text{dimana, }M_{T_2\circ T_1}=\begin{pmatrix}a_2\\b_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_1\\b_1\end{pmatrix}$$

Proses komposisi translasi tersebut dapat kamu lihat pada skema berikut:

Skema 4.1 Komposisi Translasi

Secara umum, matriks komposisi translasi dituliskan sebagai berikut:

Jika matriks translasi T_1 adalah $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ dan matriks translasi T_2 adalah $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ maka matriks komposisi translasi $T_1 \circ T_2$ atau $T_2 \circ T_1$ dituliskan,

$$M_{T_1 \circ T_2} = M_{T_1} + M_{T_2} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

$$M_{T_2 \circ T_1} = M_{T_2} + M_{T_1} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Contoh 4.17

Titik $A(6, -8)$ ditranslasikan dengan $T_1(-3, 2)$ kemudian dilanjutkan dengan translasi $T_2(-4, -1)$. Tentukan koordinat akhir titik A tersebut!

Alternatif Penyelesaian:

$$A(6,-8) \xrightarrow{M_{T_2 \circ T_1}} A'(x', y')$$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = M_{T_2} \circ M_{T_1} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = M_{T_2} + M_{T_1} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Posisi akhir titik A menjadi $A''(-1, -7)$.

Masalah 4.7

Coba kamu amati cermin di tukang cukur (atau salon). Di depan kita ada cermin dan di belakang kita juga terdapat cermin. Jadi, kamu memiliki bayangan di cermin di depanmu dan di belakangmu, bukan? Jika kamu amati lebih lanjut, bayanganmu di cermin depan akan mempunyai bayangan juga di cermin belakang dan sebaliknya. Hal ini menunjukkan terjadi pencerminan bertahap dengan dirimu sebagai objek. Nah, ini akan melahirkan konsep komposisi refleksi. Mari kita turunkan formulanya secara umum.

Misalkan sembarang titik $A(x, y)$ direfleksikan dengan C_1 dilanjutkan dengan refleksi terhadap C_2 dimana matriks refleksi C_1 adalah $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dan matriks refleksi C_2 adalah $\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$. Dapatkah kamu menemukan konsep komposisi refleksi?

Alternatif Penyelesaian:

Dengan melakukan pencerminan bertahap maka:

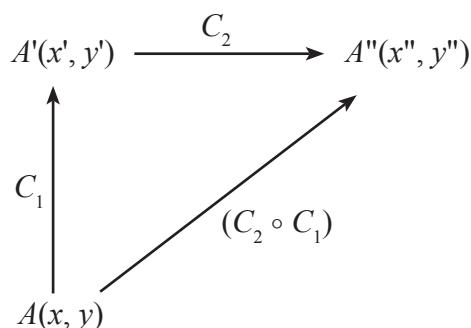
$$A(x, y) \xrightarrow{C_1} A'(x', y') \xrightarrow{C_2} A''(x'', y'')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M_{C_2} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \text{dimana } M_{C_2} = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = M_{C_1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \text{dimana } M_{C_1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = M_{C_1} M_{C_2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = M_{C_1 \circ C_2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{dimana } M_{C_1 \circ C_2} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

Proses di atas dapat dilihat pada skema berikut:

Skema 4.2: Komposisi Refleksi

Secara umum, matriks komposisi refleksi dituliskan sebagai berikut:

Jika matriks refleksi C_1 adalah $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dan matriks refleksi C_2 adalah $\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ maka matriks komposisi refleksi $C_1 \circ C_2$ atau $C_2 \circ C_1$ dituliskan,

$$M_{C_1} \circ M_{C_2} = M_{C_1} M_{C_2} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

$$M_{C_2} \circ M_{C_1} = M_{C_2} M_{C_1} = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Contoh 4.18

Garis $2x - 8y - 3 = 0$ dicerminkan dengan $C_1 \circ C_2$ di mana C_1 adalah cermin terhadap sumbu x dan C_2 adalah cermin terhadap garis $y = -x$. Tentukan persamaan bayangan garis tersebut!

Alternatif Penyelesaian:

Misalkan titik $A(x, y)$ memenuhi persamaan garis sehingga berdasarkan konsep komposisi refleksi yang telah ditemukan:

$$A(x, y) \xrightarrow{C_1 \circ C_2} A'(x', y')$$

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M_{C_1 \circ C_2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dimana $\boldsymbol{M}_{C_1} \circ \boldsymbol{M}_{C_2}$ adalah matriks pencerminan $C_1 \circ C_2$

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M_{C_1} M_{C_2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dimana $\boldsymbol{M}_{C_1}$ dan $\boldsymbol{M}_{C_2}$ adalah matriks pencerminan C_1 dan C_2

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$

Dengan kesamaan matriks maka diperoleh $x = -x'$ dan $y = y'$ sehingga persamaan bayangan garis menjadi $2(-x) - 8(y) - 3 = 0$ atau $-2x - 8y - 3 = 0$.

Konsep komposisi translasi dan komposisi refleksi sama halnya dengan konsep komposisi rotasi dan komposisi dilatasi. Dengan menggunakan konsep komposisi fungsi maka komposisi rotasi atau komposisi dilatasi merupakan proses bertahap fungsi rotasi atau fungsi dilatasi.

Masalah 4.8

Misalkan titik $A(x, y)$ diputar dengan pusat $O(0, 0)$ dan sudut α_1 dilanjutkan rotasi dengan pusat $O(0, 0)$ dan sudut α_2 menghasilkan bayangan $A''(x'', y'')$. Dapatkah kamu bangun formula komposisi rotasi?

Alternatif Penyelesaian:

Masalah ini adalah komposisi rotasi dengan pusat yang sama, yaitu di $O(0, 0)$.

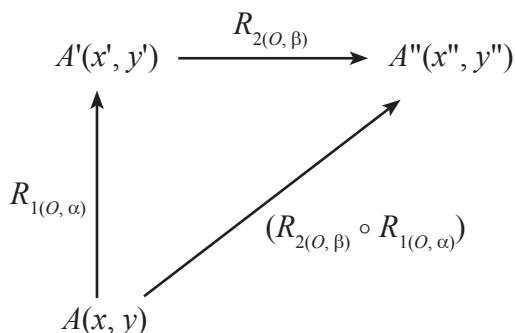
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R_1\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = R_2\left(\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cos\alpha_2 & -\sin\alpha_2 \\ \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

dengan mensubstitusi $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ diperoleh,

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = R_2\left(R_1\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)\right) \begin{pmatrix} \cos\alpha_2 & -\sin\alpha_2 \\ \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\left(R_2 \circ R_1\right)\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha_2+\alpha_1) & -\sin(\alpha_2+\alpha_1) \\ \sin(\alpha_2+\alpha_1) & \cos(\alpha_2+\alpha_1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Perhatikan skema komposisi rotasi berikut!

Skema 4.3 Komposisi rotasi

Dengan demikian, diperoleh formula untuk komposisi rotasi pada pusat putar O(0,0) sebagai berikut:

Jika $R_{1[O,\alpha_1]}$ dan $R_{2[O,\alpha_2]}$ adalah rotasi sebesar α_1 pada sudut $O(0, 0)$ dan rotasi sebesar α_2 pada sudut $O(0, 0)$ dengan maka matriks komposisi rotasi ditulis,

$$M_{\left(R_{[O,\alpha_1]} \circ R_{[O,\alpha_2]}\right)} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha_2 + \alpha_1) & -\sin(\alpha_2 + \alpha_1) \\ \sin(\alpha_2 + \alpha_1) & \cos(\alpha_2 + \alpha_1) \end{pmatrix}$$

Contoh 4.19

Perhatikan contoh-contoh berikut!

Titik $A(a, b)$ dirotasi dengan $R_1 \circ R_2$ dimana R_1 adalah rotasi dengan sudut 180° berlawanan arah jarum jam pada pusat $O(0, 0)$ dan R_2 adalah rotasi dengan sudut 90° berlawanan arah jarum jam pada pusat $P(b, 2a)$. Tentukan posisi akhir titik A tersebut!

Alternatif Penyelesaian:

Dengan konsep fungsi komposisi maka:

$$A(a, b) \xrightarrow{R_1 \circ R_2} A'(x', y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M_{R_1} \circ M_{R_2} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ dimana } M_{R_2} \begin{pmatrix} \cos 90° & -\sin 90° \\ \sin 90° & \cos 90° \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M_{R_1} \left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a-0 \\ b-0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M_{R_1} \left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right] \text{ dimana } M_{R_1} \begin{pmatrix} \cos 180° & -\sin 180° \\ \sin 180° & \cos 180° \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ 2a \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} b \\ 2a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2b\\-a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b\\2a\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b\\2a-2b\end{pmatrix}$$

Jadi, posisi akhir titik A tersebut adalah $A'(3b,3a)$.

Contoh 4.20

Garis $2x - y - 3 = 0$ dirotasi dengan $R_1 \circ R_1$ dimana R_1 adalah rotasi dengan sudut 90° berlawanan arah jarum jam pada pusat $P(1, 2)$. Tentukan persamaan posisi akhir garis tersebut!

Alternatif Penyelesaian:

Misalkan titik memenuhi garis tersebut sehingga:

$$A(x, y)\xrightarrow{R_1 \circ R_1} A'(x', y')$$

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=M_{R_1 R_1}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \text{ dimana } M_{R_1}\begin{pmatrix}\cos 90° & -\sin 90°\\ \sin 90° & \cos 90°\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=M_{R_1}\left[\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-1\\y-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right]$$

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=M_{R_1}\begin{pmatrix}-y+3\\x+1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-y+3-1\\x+1-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x+2\\-y+4\end{pmatrix}$$

Dengan kesamaan matriks maka diperoleh $x = -x' + 2$ dan $y = -y' + 4$ sehingga persamaan garis menjadi $2(-x + 2) - (-y + 4) - 3 = 0$ atau $-2x + y - 3 = 0$.

Masalah 4.9

Misalkan titik $A(x, y)$ didilatasi dengan pusat $O(0, 0)$ dan faktor skala k_1 dilanjutkan dilatasi dengan pusat $O(0, 0)$ dan faktor skala k_2 diperoleh koordinat hasil dilatasi $A''(x'', y'')$. Dengan cara yang sama pada konsep komposisi pada transformasi sebelumnya, temukan konsep komposisi dilatasi pada pusat yang sama yaitu di $O(0, 0)$!

Alternatif Penyelesaian:

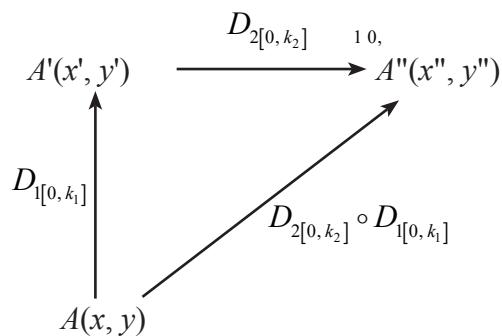
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = D_1\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = k_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = D_2\left(\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) = k_2\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

dengan mensubstitusi $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = D_1\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = k_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ diperoleh,

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = D_2\left(D_1\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)\right) \quad k_2k_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$(D_2 \circ D_1)\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = k_2k_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Perhatikan skema!

Skema 4.4 Komposisi dilatasi

Dengan demikian, formula untuk komposisi dilatasi pada pusat $O(0, 0)$ adalah:

Jika titik $A(x, y)$ dirotasi berturut-turut oleh $D_{1[O,k_1]}$ dan $D_{2[O,k_2]}$ maka,

$$(D_2 \circ D_1)\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = k_2 k_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Contoh 4.21

Titik $A(3, 5)$ didilatasi dengan $D_1 \circ D_2$ dimana D_1 adalah dilatasi dengan faktor skala 3 pada pusat $O(0, 0)$ dan D_2 adalah dilatasi dengan faktor skala 2 pada pusat $P(2, 1)$.Tentukan koordinat akhir titik A tersebut!

Alternatif Penyelesaian:

Dengan menggunakan konsep komposisi dilatasi, maka:

$$A(3, 5) \xrightarrow{D_1 \circ D_2} A'(x', y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M_{D_1 \circ D_2} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M_{D_1} \left[2\left[\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 3\left[\begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 27 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 28 \end{pmatrix}$$

Jadi, koordinat akhir titik A tersebut adalah $A'(14, 28)$

Contoh 4.22

Jika D_k adalah dilatasi ke-k dengan faktor skala $\frac{k}{k+1}$ pada pusat $O(0, 0)$ maka tentukan dilatasi titik $A(-11, 55)$ oleh $D_1 \circ D_2 \circ D_3 \circ \ldots \circ D_{10}$.

Alternatif Penyelesaian:

Dengan menggunakan konsep komposisi dilatasi pada pusat yang sama maka:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M_{D_1 \circ D_2 \circ D_3 \ldots \circ D_{10}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M_{D_1} M_{D_2} M_{D_3} \ldots M_{D_{10}} \begin{pmatrix} -11 \\ 55 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{1+1} \cdot \frac{2}{2+1} \cdot \frac{3}{3+1} \cdot \ldots \cdot \frac{10}{10+1} \begin{pmatrix} -11 \\ 55 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{10}{11} \begin{pmatrix} -11 \\ 55 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} -11 \\ 55 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Jadi, posisi akhir titik A tersebut setelah dilatasi adalah $A'(-1, 5)$.

Uji Kompetensi 4.3

1. Dengan konsep komposisi transformasi, tentukan koordinat titik A setelah ditranslasi berikut:
   a. Titik $A(1, -2)$ ditranslasikan dengan $T_1(-1, 12)$ kemudian dilanjutkan dengan translasi $T_2(-2, -10)$.
   b. Titik $B(1, 4)$ ditranslasikan dengan $T_1(-3, 2)$ kemudian dilanjutkan dengan translasi $T_2(4, 3)$, dilanjutkan lagi dengan translasi $T_3(-2, -3)$.
   c. Titik $C(1, 5)$ ditranslasikan dengan $T_2 \circ T_1$ dimana $T_1(3, 4)$ dan $T_2(4, -9)$.

d. Titik $D(-10, 25)$ ditranslasikan dengan $T_1 \circ T_2$ dimana $T_1(-2, -4)$ dan $T_2(1, -5)$.

e. Titik $E(-1, 8)$ ditranslasikan dengan $T_2 \circ T_1 \circ T_2$ dimana $T_1(2, -1)$ dan $T_2(-1, -2)$.

2. Dengan konsep komposisi transformasi, tentukan persamaan suatu objek setelah ditranslasi berikut:

   a. Garis $2x - 3y - 4 = 0$ ditranslasikan dengan $T_1(1, 2)$ kemudian dilanjutkan dengan translasi $T_2(2, -1)$.

   b. Garis $-3x - 5y + 15 = 0$ ditranslasikan dengan $T_1(3, 4)$ kemudian dilanjutkan dengan translasi $T_2(4, 5)$, dilanjutkan lagi dengan translasi $T_3(-5,-6)$.

   c. Garis $-x + 3y - 5 = 0$ ditranslasikan dengan $T_1 \circ T_2$ dimana $T_1(-3, 2)$ dan $T_2(-2, 3)$.

   d. Parabola $y - 2x^2 + 3x - 4 = 0$ ditranslasikan dengan $T_2 \circ T_1$ dimana $T_1(-2, -2)$ dan $T_2(1, -1)$.

   e. Parabola $2y = 2x^2 - 4x - 1$ ditranslasikan dengan $T_1 \circ T_1 \circ T_2$ dimana $T_1(2, -1)$ dan $T_2(-1, -2)$.

3. Jika C_1 adalah pencerminan terhadap titik $O(0, 0)$, C_2 adalah pencerminan terhadap sumbu x, C_3 adalah pencerminan terhadap sumbu y, C_4 adalah pencerminan terhadap garis $y = x$, dan C_5 adalah pencerminan terhadap garis $y = -x$ maka tentukan koordinat bayangan titik oleh komposisi pencerminan berikut:

   a. Titik $A(2, 2)$ dicerminkan dengan $C_2 \circ C_1$

   b. Titik $B(12, -2)$ dicerminkan dengan $C_1 \circ C_2$

   c. Titik $C(-4, 6)$ dicerminkan dengan $C_3 \circ C_4$

   d. Titik $D(-5, 9)$ dicerminkan dengan $C_5 \circ C_2 \circ C_3$

   e. Titik $E(-1, -3)$ dicerminkan dengan $C_4 \circ C_1 \circ C_5$

4. Jika C_1 adalah pencerminan terhadap titik $O(0, 0)$, C_2 adalah pencerminan terhadap sumbu x, C_3 adalah pencerminan terhadap sumbu y, C_4 adalah pencerminan terhadap garis $y = x$, dan C_5 adalah pencerminan terhadap garis $y = -x$ maka tentukan koordinat bayangan objek oleh komposisi pencerminan berikut:
   a. Garis $2x + 4y - 7 = 0$ dicerminkan dengan $C_1 \circ C_2$
   b. Garis $-x + 3y + 5 = 0$ dicerminkan dengan $C_3 \circ C_5$
   c. Garis $-3x + 2y + 6 = 0$ dicerminkan dengan $C_5 \circ C_5 \circ C_4$
   d. Parabola $y = -x^2 + 3x - 2$ dicerminkan dengan $C_1 \circ C_4$
   e. Parabola $-y + 2x^2 - 5x + 6 = 0$ dicerminkan dengan $C_2 \circ C_3 \circ C_4$

5. Jika R_1 adalah rotasi sejauh 90° berlawanan arah jarum jam dengan pusat $O(0, 0)$, R_2 adalah rotasi sejauh 270° berlawanan arah jarum jam dengan pusat $O(0, 0)$, R_3 adalah rotasi sejauh 180° searah jarum jam dengan pusat $P(1, -1)$, dan R_4 adalah rotasi sejauh 90° searah jarum jam dengan pusat $P(1, -1)$ maka tentukan posisi objek oleh komposisi rotasi berikut:
   a. Titik $A(2, -2)$ dirotasi dengan $R_1 \circ R_2$
   b. Titik $B(-8, 2)$ dirotasi dengan $R_2 \circ R_1$
   c. Titik $C(8, -6)$ dirotasi dengan $R_3 \circ R_4$
   d. Garis $-x + 9y - 3 = 0$ dirotasi dengan $R_2 \circ R_1$
   e. Parabola $2y = 2x^2 - 3x + 4$ dirotasi dengan $R_4 \circ R_3$

6. Temukan formula komposisi rotasi $R_1 \circ R_2$ terhadap titik $A(x, y)$ dimana adalah rotasi dengan sudut θ_1 dan pusat rotasi $P_1(a, b)$ dan R_2 adalah rotasi dengan sudut θ_2 dan pusat dilatasi $P_2(c, d)$.

7. Jika R_k adalah rotasi ke-k sejauh 90° searah jarum jam dengan masing-masing pada pusat $O(0, 0)$maka tentukan rotasi titik $A(-2, -4)$ oleh $R_1 \circ R_2 \circ R_3 \circ \ldots \circ R_{10}$.

8. Jika D_1 adalah dilatasi dengan faktor skala 2 pada pusat $O(0, 0)$, D_2 adalah dilatasi dengan faktor skala 3 pada pusat $O(0, 0)$, D_3 adalah dilatasi dengan faktor skala –2 pada pusat $P(-1, -1)$, dan D_4 adalah dilatasi dengan faktor skala 4 pada pusat $P(-1, -1)$ maka tentukan posisi objek oleh komposisi dilatasi berikut:
   a. Titik $A(12, -4)$ didilatasi dengan $D_1 \circ D_2$
   b. Titik $B(-3, 4)$ didilatasi dengan $D_3 \circ D_4$
   c. Titik $C(-1, 2)$ didilatasi dengan $D_1 \circ D_4$
   d. Garis $3x + 2y - 1 = 0$ didilatasi dengan $D_2 \circ D_1$
   e. Parabola $3y = 2x^2 - 1$ didilatasi dengan $D_4 \circ D_3$

9. Temukan formula komposisi dilatasi $D_1 \circ D_2$ terhadap titik $A(x, y)$ dimana D_1 adalah dilatasi dengan faktor skala k_1 dan pusat dilatasi $P_1(a, b)$ dan D_2 adalah dilatasi dengan faktor skala k_2 dan pusat dilatasi $P_2(c, d)$.

10. Jika D_k adalah dilatasi ke-k dengan faktor skala h pada pusat $P(1, -1)$ maka tentukan dilatasi titik $A(-2, -4)$ oleh $D_1 \circ D_2 \circ D_2 \circ. . . \circ D_{10}$.

D. Penutup

Setelah kita membahas materi transformasi, kita membuat kesimpulan sebagai hasil pengamatan pada berbagai konsep dan aturan transformasi sebagai berikut:

1. Transformasi yang dikaji terdiri dari translasi (pergeseran), refleksi (pencerminan), rotasi (perputaran) dan dilatasi (perkalian) serta komposisinya.
2. Matriks transformasi yang diperoleh adalah:

No.	Transformasi	Matriks Transformasi
1.	Translasi $T(a, b)$	$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$
2.	Refleksi Titik $O(0, 0)$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
3.	Refleksi Sumbu x	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
4.	Refleksi Sumbu y	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
5.	Refleksi Garis $y = x$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
6.	Refleksi Garis $y = -x$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
7.	Rotasi sebesar sudut α	$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$
8.	Dilatasi $[k,P(a,b)]$	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

9	M_T : Matriks Translasi	$M_{T_2 \circ T_1} = M_{T_2} + M_{T_1}$
10	M_T : Matriks Transformasi	$M_{T_2 \circ T_1} = M_{T_2} M_{T_1}$

3. Transformasi mempunyai sifat-sifat sebagai berikut:

Translasi

Bangun yang digeser (translasi) tidak mengalami perubahan bentuk dan ukuran.

Refleksi

Bangun yang dicerminkan (refleksi) dengan cermin datar tidak mengalami perubahan bentuk dan ukuran. Jarak bangun dengan cermin (cermin datar) adalah sama dengan jarak bayangan dengan cermin tersebut.

Rotasi

Bangun yang diputar (rotasi) tidak mengalami perubahan bentuk dan ukuran.

Dilatasi

Bangun yang diperbesar atau diperkecil (dilatasi) dengan skala k dapat mengubah ukuran atau tetap ukurannya tetapi tidak mengubah bentuk.

❖ Jika $k > 1$ maka bangun akan diperbesar dan terletak searah terhadap pusat dilatasi dengan bangun semula.
❖ Jika $k = 1$ maka bangun tidak mengalami perubahan ukuran dan letak.
❖ Jika $0 < k < 1$ maka bangun akan diperkecil dan terletak searah terhadap pusat dilatasi dengan bangun semula.
❖ Jika $-1 < k < 0$ maka bangun akan diperkecil dan terletak berlawanan arah terhadap pusat dilatasi dengan bangun semula.
❖ Jika $k = -1$ maka bangun tidak akan mengalami perubahan bentuk dan ukuran dan terletak berlawanan arah terhadap pusat dilatasi dengan bangun semula.
❖ Jika $k < -1$ maka bangun akan diperbesar dan terletak berlawanan arah terhadap pusat dilatasi dengan bangun semula.

Selanjutnya, kita akan membahas tentang materi barisan dan deret. Materi prasyarat yang harus kamu kuasai adalah himpunan, fungsi, dan operasi hitung bilangan. Hal ini sangat berguna dalam penentuan fungsi dari barisan tersebut. Semua apa yang kamu sudah pelajari sangat berguna untuk melanjutkan bahasan berikutnya dan seluruh konsep dan aturan-aturan matematika dibangun dari situasi nyata dan diterapkan dalam pemecahan masalah kehidupan.

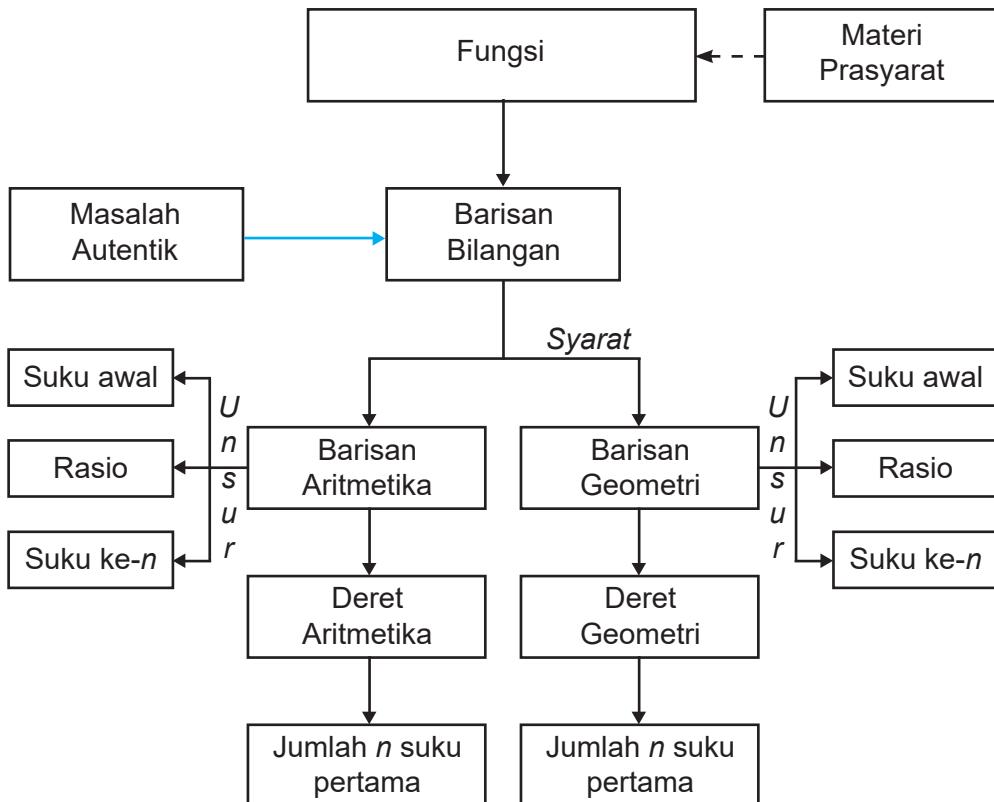
Barisan

A. Kompetensi Dasar dan Pengalaman Belajar

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
Setelah mengikuti pembelajaran barisan, siswa mampu: 3.6 Menggeneralisasi pola bilangan dan jumlah pada barisan Aritmetika dan Geometri. 4.6 Menggunakan pola barisan Aritmetika dan Geometri untuk menyajikan dan menyelesaikan masalah kontekstual (termasuk pertumbuhan, peluruhan, bunga majemuk, dan anuitas)	Melalui pembelajaran materi barisan , siswa memperoleh pengalaman belajar: 1. Menemukan konsep dan pola barisan melalui pemecahan masalah autentik. 2. Berkolaborasi memecahkan masalah aktual dengan pola interaksi sosial kultur. 3. Berpikir tingkat tinggi (berpikir kritis, kreatif) dalam menyelidiki dan mengaplikasikan konsep dan pola barisan dalam memecahkan masalah autentik.

Istilah Penting

- Pola Bilangan
- Beda
- Rasio
- Aritmetika
- Geometri

B. Diagram Alir

C. Materi Pembelajaran

5.1 Menemukan Pola Barisan

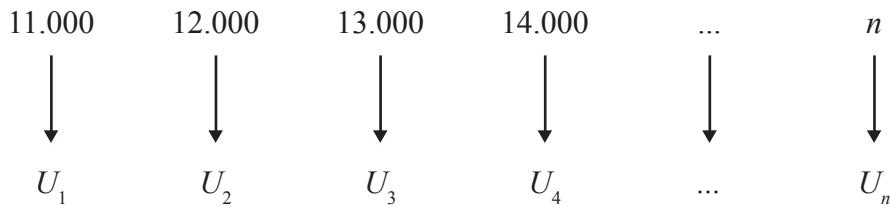
Amati dan kritisi masalah nyata kehidupan yang dapat dipecahkan secara arif dan kreatif melalui proses matematisasi. Dalam proses pembelajaran barisan, berbagai konsep dan aturan matematika terkait barisan akan ditemukan melalui pemecahan masalah, melihat pola susunan bilangan, menemukan berbagai strategi sebagai alternatif pemecahan masalah.

Perhatikan ilustrasi berikut. Data uang saku seorang anak sekolah setiap hari adalah Rp10.000,00 dan untuk menumbuhkan niat menabung orang tuanya menambahkan sebesar Rp1.000,00 tiap harinya.

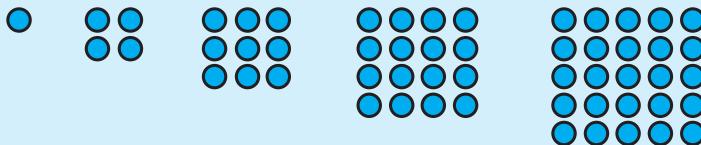
Jika uang saku tersebut disusun dengan bilangan-bilangan maka kita akan memperoleh susunan bilangan seperti berikut.

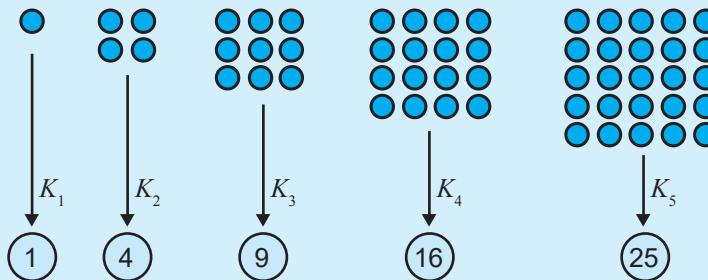
Perhatikan bilangan tersebut mempunyai keteraturan dari urutan pertama, kedua, ketiga, keempat, dan seterusnya, yaitu bilangan berikutnya diperoleh dari bilangan sebelumnya ditambah 1.000. Bilangan-bilangan yang disusun berurut dengan aturan tertentu seperti itulah dikenal dengan nama *barisan bilangan*.

Konsep tentang fungsi akan kita gunakan dalam penerapan menemukan pola dari barisan, karena barisan merupakan suatu fungsi dengan domain bilangan bulat positif dan range bilangan real. Materi tentang fungsi sudah dipelajari di Bab 3 kelas 10. Pada bab tersebut dituliskan definisi fungsi yaitu Misalkan A dan B himpunan, Fungsi f dari A ke B adalah suatu aturan pengaitan yang memasangkan setiap anggota himpunan A dengan tepat satu anggota himpunan B. Jika kita perhatikan sebuah barisan maka suku ke-n dengan n merupakan bilangan bulat positif disebut sebagai domain akan berpasangan terhadap rumus suku ke-n dari barisan itu dan disebut range, yang merupakan bilangan real.

Misalkan barisan bilangan ditulis lambang U untuk menyatakan urutan suku-sukunya maka bilangan pertama ditulis $U(1)$ atau U_1, bilangan kedua ditulis $U(2)$ atau U_2, dan seterusnya. Maka kita dapat membuat aturan pengaitan seperti berikut ini.

Dari pasangan di atas diperoleh bentuk umum barisan bilangan adalah U_1, U_2, U_3, ..., U_n, ... Dengan $U_n = f(n)$ yang disebut dengan rumus umum suku ke-n dari barisan bilangan. Untuk memahami barisan dan pola barisan mari perhatikan masalah-masalah berikut ini.

Masalah 5.1

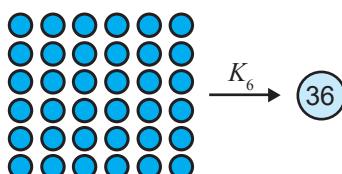
Beberapa kelereng dikelompokkan dan disusun sehingga setiap kelompok tersusun dalam bentuk persegi sebagai berikut.

Gambar 5.1: Susunan Kelereng

Kelereng dihitung pada setiap kelompok dan diperoleh barisan : 1, 4, 9, 16, 25.

Gambar 5.1: Jumlah Kelereng pada Setiap Kelompok

Permasalahan:

Dapatkah kamu temukan bilangan berikutnya pada barisan tersebut? Dapatkah kamu temukan pola barisan tersebut? Tentukan banyak kelereng pada kelompok ke-15?

Alternatif Penyelesaian:

1. Kemungkinan metode yang dapat digunakan adalah membuat susunan benda berikutnya dan menghitung kembali banyak kelereng pada susunan itu. Alternatif penyelesaian ini tidak efisien karena harus menyusun kembali banyak kelereng untuk kelompok berikutnya.

Gambar 5.2: Jumlah Kelereng pada Kelompok ke-6

2. Alternatif penyelesaian lainnya adalah menemukan pola barisan tersebut. Perhatikan tabel berikut dan lengkapilah!

Tabel 5.1: Pola Banyak Kelereng Pada Setiap Kelompok

Kelompok	Banyak Kelereng	Pola
K_1	1	$1 = 1 \times 1$
K_2	4	$4 = 2 \times 2$
K_3	…	… = …
K_4	…	… = …
K_5	…	… = …
. . .	. . .	. . .
K_n	…	… = …

Dengan pola barisan pada tabel yang kamu lengkapi di atas, dapatkah kamu menentukan bilangan berikutnya? Berapakah bilangan untuk kelompok ke-15?

Apakah mungkin ada pola lain untuk menyelesaikan masalah di atas? Coba kamu lengkapi tabel berikut.

Tabel 5.2: Pola Banyak Kelereng pada Setiap Kelompok

Kelompok	Banyak Kelereng	Pola
K_1	1	… = …
K_2	4	… = …
K_3	9	… = …
K_4	…	… = …
K_5	…	… = …
. . .	. . .	. . .
K_n	?	… = …

Bagaimana pola barisan dari tabel yang kamu lengkapi di atas? Dapatkah kamu menentukan bilangan berikutnya? Berapakah bilangan untuk kelompok ke-15?

Kamu dapat dengan mudah menentukan bilangan-bilangan berikutnya pada sebuah barisan bilangan jika dapat menemukan pola barisannya. Silahkan pelajari pola barisan pada beberapa contoh berikut.

Contoh 5.1

Perhatikan barisan huruf berikut:

ABBCCCDDDDABBCCCDDDDABBCCCDDDD...

Amatilah barisan huruf tersebut terlebih dahulu! Tentukanlah huruf pada urutan $2^5 \times 3^3$!

Alternatif Penyelesaian:

Pertama, kita perlihatkan urutan setiap huruf pada barisan, sebagai berikut.

A	*B*	*B*	*C*	*C*	*C*	*D*	*D*	*D*	*D*	*A*	*B*	*B*	*C*	*C*	*C*	*D*	*D*	*D*	*D*	...
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	...

Jika kamu amati dengan teliti, kelompok huruf *ABBCCCDDDD* pada urutan 1 sampai 10 berulang, bukan? Perulangan kelompok huruf terjadi pada setiap kelipatan 10 huruf pertama. Jadi, huruf pada urutan 1 sama dengan huruf pada urutan 11, urutan 21, urutan 31, dan seterusnya.

Kedua, huruf pada urutan $2^5 \times 3^3$ adalah huruf pada urutan $32 \times 27 = 864$ atau $864 = 860 + 4 = 86 \times 10 + 4$ sehingga perulangan kelompok huruf tersebut mengalami perulangan sebanyak 86 kali. Dengan demikian, huruf pada urutan ke-864 sama dengan huruf pada urutan ke-4 atau C, bukan? Perhatikan tabel di bawah ini!

Tabel 5.3: Urutan Barisan Huruf

Urutan ke-	Huruf	Urutan ke-	Huruf	...	Urutan ke-	Huruf	Urutan ke-	Huruf
1	*A*	11	*A*	...	851	*A*	861	*A*
2	*B*	12	*B*	...	852	*B*	862	*B*
3	*B*	13	*B*	...	853	*B*	863	*B*
4	*C*	14	*C*	...	854	*C*	**864**	***C***
5	*C*	15	*C*	...	855	*C*		
6	*C*	16	*C*	...	856	*C*		
7	*D*	17	*D*	...	857	*D*		
8	*D*	18	*D*	...	858	*D*		
9	*D*	19	*D*	...	859	*D*		
10	*D*	20	*D*	...	860	*D*		

Contoh 5.2

Sebuah barisan bilangan asli dituliskan sebagai berikut: 12345678910111 21314151617181920212223242526... sehingga suku ke-10 = 1, suku ke-11 = 0, suku ke-12 = 1, dan seterusnya. Dapatkah kamu temukan angka yang menempati suku ke-2004?

Alternatif Penyelesaian:

Mari kita amati kembali barisan tersebut, sebagai berikut.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	0	1	1	1	2	1	3	1	...	?
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	u_{16}	u_{17}	u_{18}	...	u_{2004}

u_n menyatakan suku ke-n pada barisan dengan $n = 1, 2, 3, 4, ...$

Kita akan mencari angka yang menempati suku ke-2004 dengan menghitung banyak suku pada bilangan satuan, puluhan, dan ratusan sebagai berikut.

Langkah 1.

Mencari banyak suku pada barisan bilangan satuan (1 sampai 9):
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Banyak suku pada barisan bilangan satuan adalah $1 \times 9 = 9$ suku.

Langkah 2.

Mencari banyak suku pada barisan bilangan puluhan (10 sampai 99)
10, 11, 12, 13, ..., 19 terdapat 2×10 suku = 20 suku
20, 21, 22, 23, ..., 29 terdapat 2×10 suku = 20 suku
...
90, 91, 92, 93, ..., 99 terdapat 2×10 suku = 20 suku

Banyak suku pada barisan bilangan puluhan adalah $9 \times 20 = 180$ suku. Jadi, banyak suku pada barisan 1 sampai 99 adalah $9 + 180 = 189$ suku.

Langkah 3.

Mencari banyak suku pada barisan bilangan puluhan (100 sampai 999)
Jika ratusan (1 sampai 6)
100, 101, 102, 103, ..., 109 terdapat 3×10 suku = 30 suku
110, 111, 112, 113, ..., 119 terdapat 3×10 suku = 30 suku
120, 121, 122, 123, ..., 129 terdapat 3×10 suku = 30 suku
...
690, 691, 692, 693, ..., 699 terdapat 3×10 suku = 30 suku

Banyak suku untuk barisan bilangan ratusan dengan ratusan 1 sampai 6 adalah $6 \times 10 \times 30 = 1800$ suku.

Jadi terdapat sebanyak 9 + 180 + 1800 = 1989 suku pada barisan bilangan 1 sampai dengan 699 sehingga suku ke-1989 adalah 9. Suku berikutnya (suku ke-1990) adalah barisan bilangan dengan ratusan 7 sebagai berikut.

9	7	0	0	7	0	1	7	0	2	7	0	3	7	0	4
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
u_{1989}	u_{1990}	u_{1991}	u_{1992}	u_{1993}	u_{1994}	u_{1995}	u_{1996}	u_{1997}	u_{1998}	u_{1999}	u_{2000}	u_{2001}	u_{2002}	u_{2003}	u_{2004}

Angka pada suku ke-2004 adalah 4.

Contoh 5.3

Tentukan pola barisan pada $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}, \frac{1}{42}, ..., \frac{1}{9900}$. Tentukanlah banyak suku pada barisan tersebut.

Alternatif Penyelesaian:

Jika u_n adalah suku ke-n sebuah barisan dengan n = 1, 2, 3,... maka barisan di atas disajikan dalam tabel berikut.

Tabel 5.4: Pola Barisan

Suku ke	Nilai	Pola
u_1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} = \frac{1}{1^2+1}$
u_2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6} = \frac{1}{2^2+2}$
u_3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12} = \frac{1}{3^2+3}$
u_4	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20} = \frac{1}{4^2+4}$
u_5	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30} = \frac{1}{5^2+5}$

Berdasarkan pola barisan $u_n = \frac{1}{n^2+n}$ yang telah diperoleh pada tabel di samping maka $u_n = \frac{1}{9900}$ atau

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n^2+n} = \frac{1}{9900}$$
$$\Leftrightarrow n^2 + n = 9900$$
$$\Leftrightarrow n^2 + n - 9900 = 0$$
$$\Leftrightarrow (n-99)(n+100) = 0$$
$$\Leftrightarrow n = 99$$

Suku ke	Nilai	Pola
u_6	$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{42} = \frac{1}{6^2 + 6}$
...	...	...
u_n	?	$? = \frac{1}{n^2 + n}$

Barisan $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}, \frac{1}{42}, ..., \frac{1}{9900}$ terdiri atas 99 suku.

Diskusikan dengan temanmu mengapa yang digunakan $n = 99$?
Jika s_n adalah jumlah n suku pertama dari sebuah barisan dengan $n = 1, 2, 3, ...$ maka dari barisan di atas disajikan dalam tabel berikut.

Tabel 5.5: Pola

Suku	Jumlah suku-suku	Nilai
s_1	u_1	$\frac{1}{2}$
s_2	$u_1 + u_2$	$\frac{2}{3}$
s_3	$u_1 + u_2 + u_3$	$\frac{3}{4}$
s_4	$u_1 + u_2 + u_3 + u_4$	$\frac{4}{5}$
s_5	$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5$	$\frac{5}{6}$
s_6	$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6$	$\frac{6}{7}$
...	...	...

Suku	Jumlah suku-suku	Nilai
s_n	$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + ... + u_n$	$s_n = \frac{n}{n+1}$

Berdasarkan tabel di atas, s_1, s_2, s_3, ..., s_n, ... yaitu $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, ..., \frac{99}{100}, ...$ adalah sebuah barisan dengan pola $s_n = \frac{n}{n+1}$.

Karena $n = 99$ maka $s_{99} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + ... + \frac{1}{9900} = \frac{99}{100}$

Jika s_n adalah jumlah n suku pertama dari sebuah barisan dengan $n = 1, 2, 3, ...$ atau $s_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_{n-1} + u_n$ dan $s_{n-1} = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_{n-1}$ maka $s_n = s_{n-1} + u_n$ atau $u_n = s_n - s_{n-1}$.

Contoh 5.4

Suatu barisan dengan pola $s_n = 2n^3 - 3n^2$. Tentukan pola barisan tersebut kemudian tentukanlah suku ke-10.

Alternatif Penyelesaian:

Dengan rumus $u_n = s_n - s_{n-1}$ maka dapat ditentukan $s_n = 2n^3 - 3n^2$ atau $s_m = 2m^3 - 3m^2$. Misalkan $m = n - 1$ maka

$$s_{n-1} = 2(n-1)^3 - 3(n-1)^2$$

$$s_{n-1} = (2n^3 - 6n^2 + 6n - 2) - (3n^2 - 6n + 3)$$

$$s_{n-1} = 2n^3 - 9n^2 + 12n - 5$$

Jadi,

$$u_n = s_n - s_{n-1} = (2n^3 - 3n^2) - (2n^3 - 9n^2 + 12n - 5)$$

$$u_n = 6n^2 - 12n + 5$$

Pola barisan tersebut adalah $u_n = 6n^2 - 12n + 5$ sehingga:

$u_{10} = 6(10)^2 - 12(10) + 5 = 600 - 120 + 5 = 485$

Jadi, suku ke-10 pada barisan tersebut adalah 485.

5.2 Menemukan Konsep Barisan Aritmetika

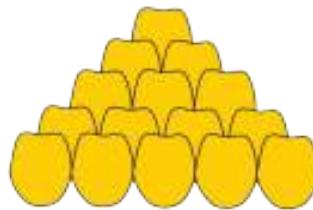
Pada subbab di atas, kita telah membicarakan masalah pola dari barisan bilangan secara umum. Berikutnya, kita akan belajar menemukan konsep barisan aritmetika.

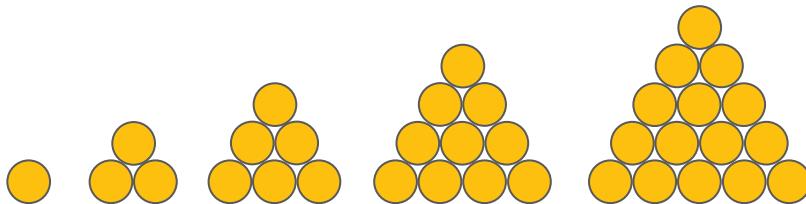
Masalah 5.2

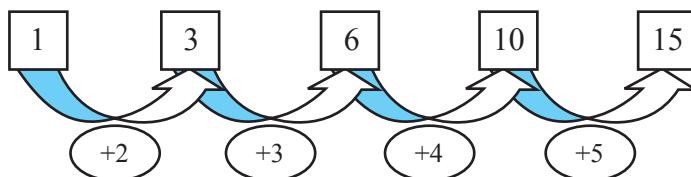
Gambar 5.3: Tumpukan Buah Jeruk

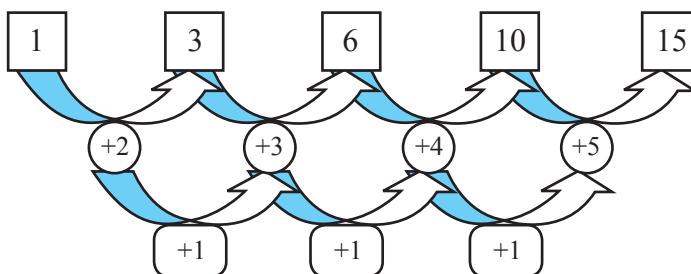
Perhatikan gambar tumpukan jeruk di samping ini! Bagaimana cara menentukan atau menduga banyak jeruk dalam satu tumpukan?

Alternatif Penyelesaian:

Jika diperhatikan gambar di atas, maka diperoleh susunan dari beberapa jeruk. Jeruk itu dapat disusun membentuk sebuah piramida.

Gambar 5.4: Susunan piramida jeruk

Jumlah jeruk pada bagian bawah tumpukan akan lebih banyak dibandingkan pada susunan paling atas. Misalkan susunan jeruk tersebut disederhanakan menjadi sebuah susunan segitiga, seperti gambar di bawah ini.

Gambar 5.5: Susunan bulatan bentuk segitiga

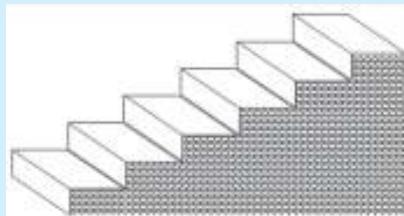
- Mengapa harus dengan susunan segitiga, coba lakukan dengan susunan segi empat. Apa yang kamu temukan?
  Banyaknya bulatan yang tersusun dari setiap kelompok dapat dituliskan dengan bilangan, yaitu 1, 3, 6, 10, 15. Bilangan tersebut membentuk barisan. Perhatikan polanya pada Gambar 5.4:

Gambar 5.5: Pola susunan jumlah jeruk dalam tumpukan

  Ternyata beda antara setiap dua bilangan yang berdekatan membentuk barisan yang baru yaitu 2, 3, 4, 5,... Perhatikan skema berikut.

Gambar 5.7: Pola turunan jumlah jeruk dalam tumpukan

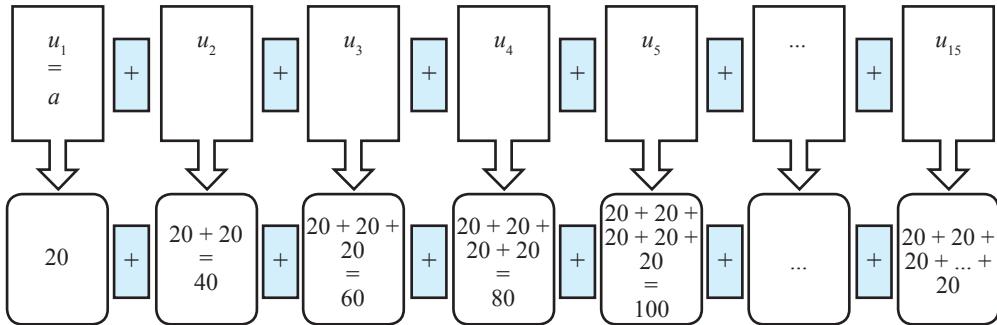
  Beda setiap dua bilangan yang berdekatan pada barisan 2, 3, 4, 5,... adalah tetap yaitu 1. Dengan demikian barisan 2, 3, 4, 5,... disebut "**Barisan Aritmetika**" dan barisan 1, 3, 6, 10, 15, ... disebut "**Barisan Aritmetika Tingkat Dua**".

- Coba kamu bentuk sebuah barisan aritmetika tingkat tiga?

Masalah 5.3

Perhatikan masalah disamping!
Jika tinggi satu anak tangga adalah 20 cm, berapakah tinggi tangga jika terdapat 15 anak tangga? Tentukanlah pola barisannya!

Gambar 5.8: Tangga

Alternatif Penyelesaian

Untuk menentukan tinggi tangga maka permasalahan di atas diurutkan menjadi:

Dari uraian di atas, ditemukan susunan bilangan 20, 40, 60, 80,…

u_n: suku ke-n

$u_1 = 20 = 1 \times 20$

$u_2 = 40 = 2 \times 20$

$u_3 = 60 = 3 \times 20$

$u_4 = 80 = 4 \times 20$

$u_5 = 100 = 5 \times 20$

...

$u_n = n \times 20 = 20n$

Cermati pola bilangan $u_n = 20n$, sehingga $u_{15} = 15 \times 20 = 300$.

Berarti tinggi tangga tersebut sampai anak tangga yang ke-15 adalah 300 cm.

Masalah 5.4

Lani, seorang perajin batik di Gunung Kidul. Ia dapat menyelesaikan 6 helai kain batik berukuran 2,4 m × 1,5 m selama 1 bulan. Permintaan kain batik terus bertambah sehingga Lani harus menyediakan 9 helai kain batik pada bulan kedua, dan 12 helai pada bulan ketiga. Dia menduga, jumlah kain batik untuk bulan berikutnya akan 3 lebih banyak dari bulan sebelumnya. Dengan pola kerja tersebut, pada bulan berapakah Lani menyelesaikan 63 helai kain batik?

Alternatif Penyelesaian

Dari masalah di atas, dapat dituliskan jumlah kain batik sejak bulan pertama seperti di bawah ini.

Bulan I : $u_1 = a = 6$
Bulan II : $u_2 = 6 + 1.3 = 9$
Bulan III : $u_3 = 6 + 2.3 = 12$
Bulan IV : $u_4 = 6 + 3.3 = 15$

Demikian seterusnya bertambah 3 helai kain batik untuk bulan-bulan berikutnya sehingga bulan ke-n : $u_n = 6 + (n - 1).3$ (n merupakan bilangan asli).

Sesuai dengan pola di atas, 63 helai kain batik selesai dikerjakan pada bulan ke-n. Untuk menentukan n, dapat diperoleh dari,

$$63 = 6 + (n-1).3$$
$$63 = 3 + 3n$$
$$n = 20.$$

Jadi, pada bulan ke-20, Lani mampu menyelesaikan 63 helai kain batik.

Jika beda antara dua bilangan berdekatan dinotasikan "***b***", maka pola susunan bilangan 6, 9, 12, 15, …, dapat dituliskan $u_n = a + (n - 1).b$

Definisi 5.1

Barisan aritmetika adalah barisan bilangan yang beda setiap dua suku yang berurutan adalah sama.
Beda, dinotasikan "***b***" memenuhi pola berikut.

$$b = u_2 - u_1 = u_3 - u_2 = u_4 - u_3 = ... = u_n - u_{n-1}$$

n: bilangan asli sebagai nomor suku, u_n adalah suku ke-n.

Berdasarkan definisi di atas diperoleh bentuk umum barisan aritmetika sebagai berikut.

$$u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, \ldots, u_n$$

Setiap dua suku yang berurutan pada barisan aritmetika memiliki beda yang sama, maka diperoleh

$u_1 = a$
$u_2 = u_1 + 1. b$
$u_3 = u_2 + b = u_1 + 2.b$
$u_4 = u_3 + b = u_1 + 3.b$

$u_5 = u_4 + b = u_1 + 4.b$

$\ldots$

$\boldsymbol{u_n = u_1 + (n - 1)b}$

Sifat 5.1

Jika $\boldsymbol{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, \ldots, u_n}$ merupakan suku-suku barisan aritmetika. Suku ke-n barisan tersebut dinyatakan sebagai berikut.

$$\boldsymbol{u_n = a + (n - 1)b}$$

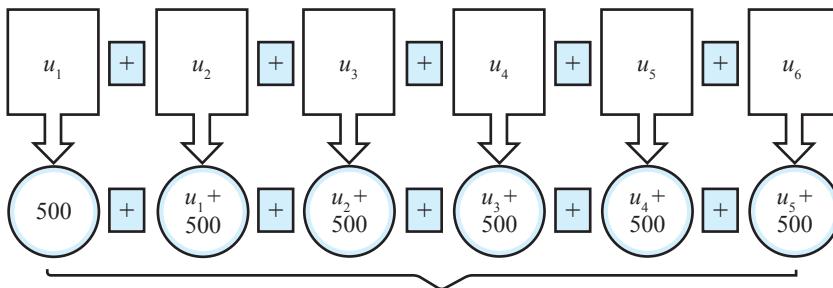
$a = u_1 =$ suku pertama barisan aritmetika, $b =$ beda barisan aritmetika.

Masalah 5.5

Setiap hari Siti menabungkan sisa uang jajannya. Uang yang ditabung setiap hari selama enam hari mengikuti pola barisan aritmetika dengan suku pertama a = 500 dan beda b = 500.

Bagaimana cara mengetahui banyaknya uang Siti yang ditabung pada hari ke-6?

Alternatif Penyelesaian:

Penyelesaian Masalah 5.5 dapat dilakukan dengan membuat barisan aritmetika dari uang yang ditabung Siti kemudian menentukan suku terakhirnya.

Karena $u_n = a + (n - 1)b$ maka $u_6 = (a + 5b)$

$= 500 + 5(500)$

$= 500 + 2.500$

$= 3.000$

Berarti tabungan Siti pada hari ke-6 adalah Rp3.000,00.

Contoh 5.5

1. Tentukan suku ke-n barisan di bawah ini!
   a. 1, 2, 3, 4, 5, 6, … tentukan suku ke-15!
   b. 4, 1, – 2, – 5, – 8, … tentukan suku ke-18!

Alternatif Penyelesaian:

a. 1, 2, 3, 4, 5, 6, …
   Dari barisan bilangan tersebut, diketahui bahwa
   $u_1 = a = 1, u_2 = 2, u_3 = 3, \ldots.$
   $b = u_2 - u_1 = u_3 - u_2 = 1.$
   Karena $u_n = a + (n - 1)b$, maka $u_{15} = a + (15 - 1)b.$
   $u_{15} = 1 + (15 - 1).1 = 15$

b. 4, 1, –2, –5, –8, …
   Diketahui: $u_1 = a = 4, u_2 = 1, u_3 = -2, u_4 = -5, \ldots.$
   $b = u_2 - u_1 = u_3 - u_2 = u_4 - u_3 = -3.$
   Karena $u_n = a + (n - 1)b$, maka $u_{18} = a + (18 - 1)b.$
   $u_{18} = 4 + (18 - 1).(-3) = -47$

2. Suku ke-4 barisan aritmetika adalah 19 dan suku ke-7 adalah 31. Tentukan suku ke-50.

Alternatif Penyelesaian:

$$u_n = a + (n - 1)b$$

$$\begin{array}{lcl} u_4 = 19 & = & a + 3b \\ u_7 = 31 & = & a + 6b \quad - \\ \hline -3b & = & -12 \\ b & = & 4 \end{array}$$

$a + 3b = 19$
$a + 3(4) = 19$
$a = 7$
$u_{50} = a + 49b$
$= 7 + 49\ (4)$
$= 203$

Uji Kompetensi 5.1

1. Suatu barisan dengan rumus suku ke-n adalah $U_n = 2n^2 - 2$.
   a. Tentukan lima suku pertama barisan tersebut.
   b. Tentukan n jika barisan tersebut yang bernilai 510.

2. Bila a, b, c merupakan suku berurutan yang membentuk barisan aritmetika, buktikan bahwa ketiga suku berurutan berikut ini juga membentuk barisan aritmetika $\frac{1}{bc}, \frac{1}{ca}, \frac{1}{ab}$!

3. Semua bilangan genap positif dikelompokkan sebagai berikut. (2), (4, 6), (8, 10, 12), (14, 16, 18, 20), (22, 24, 26, 28, 30), . . . tentukan bilangan yang terletak di tengah pada kelompok ke 15.

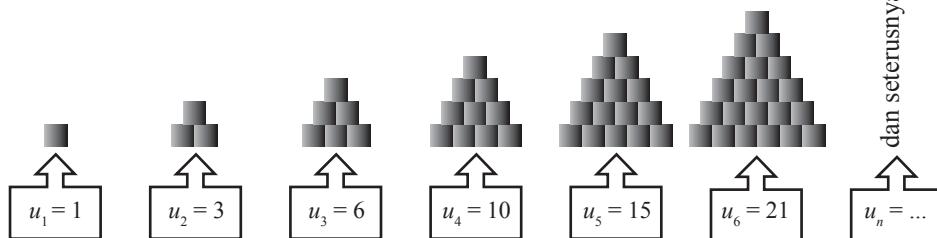
4. Tentukan banyak bilangan asli yang kurang dari 999 yang tidak habis dibagi 3 atau 5 adalah . . . .

5. Diketahui $a + (a + 1) + (a + 2) + . . . + 50 = 1.139$
   Jika a bilangan bulat positif maka tentukan nilai a.

6. Diketahui barisan yang dibentuk oleh semua bilangan asli 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 …
   Angka berapakah yang terletak pada bilangan ke 2004? (bilangan ke-12 adalah angka 1 dan bilangan ke-15 adalah angka 2).

7. Pola *ABBCCCDDDDABBCCCDDDDABBCCCDDDD*... berulang sampai tak hingga. Huruf apakah yang menempati urutan $2^6 3^4$?

8. Diketahui barisan yang dibentuk oleh semua bilangan asli 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 … Angka berapakah yang terletak pada bilangan ke-2013? (bilangan ke-12 adalah angka 1 dan bilangan ke-15 adalah angka 2)

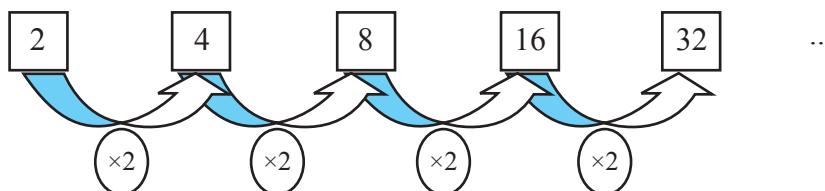
9. Perhatikan susunan balok berikut.

a. Tentukan berapa banyak balok yang dibutuhkan pada susunan ke-10.
b. Tentukan pula susunan balok yang ke-100.

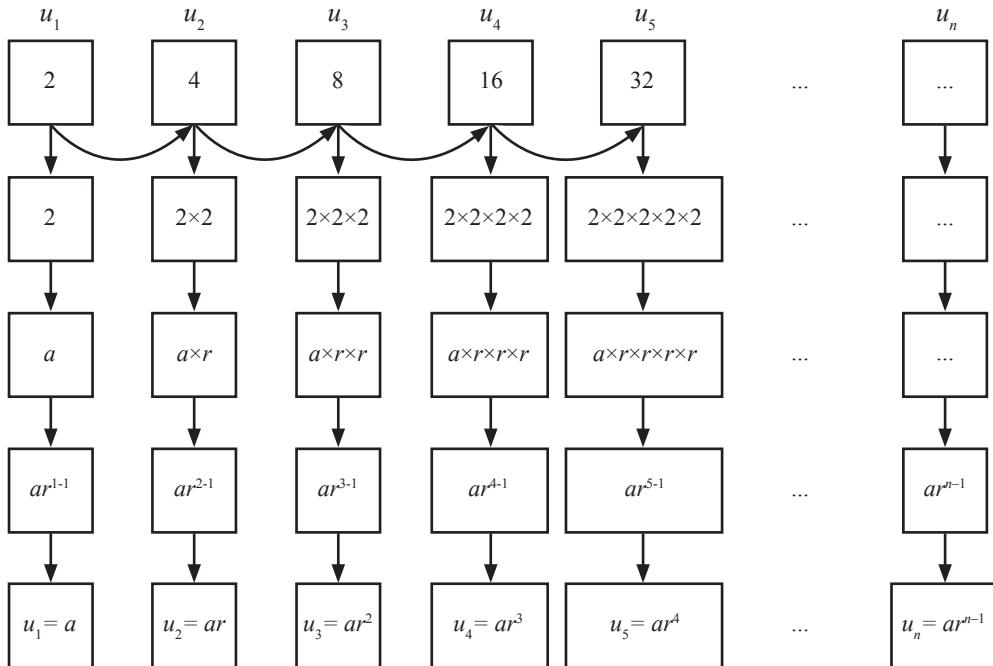
10. Suatu perusahaan minuman kaleng pada bulan Januari 2012 memproduksi 40.000 minuman kaleng. Setiap bulan perusahaan tersebut menaikkan produksinya secara tetap sebanyak 250 kaleng. Berapa banyak minuman kaleng yang diproduksi perusahaan sampai akhir bulan Juni 2013?

Proyek
Himpunlah minimal tiga masalah penerapan barisan aritmetika dalam bidang fisika, teknologi informasi, dan masalah nyata di sekitarmu. Ujilah berbagai konsep dan aturan barisan aritmetika di dalam pemecahan masalah tersebut. Buatlah laporan hasil kerjamu dan sajikan di depan kelas!

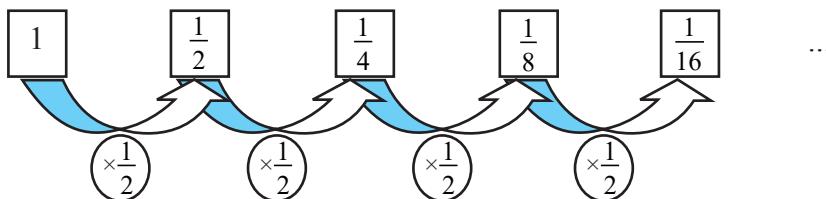
5.3 Menemukan Konsep Barisan Geometri

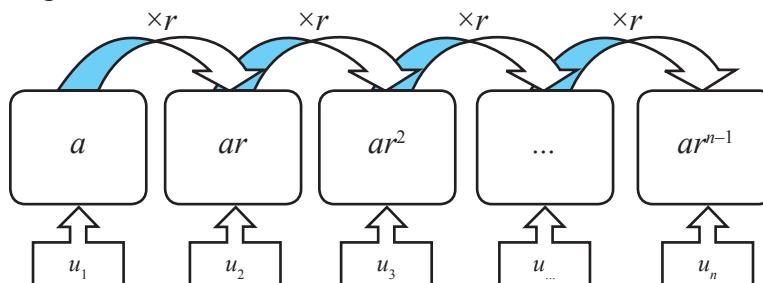
Contoh 5.6

Perhatikan barisan bilangan 2, 4, 8, 16, …

Nilai perbandingan $\frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} = ... = \frac{u_n}{u_{n-1}} = 2$. Jika nilai perbandingan dua suku berurutan dimisalkan r dan nilai suku pertama adalah a, maka susunan bilangan tersebut dapat dinyatakan dengan 2, 2 × 2, 2 × 2 × 2, …

Perhatikan gambar berikut ini!

dari pola di atas dapat disimpulkan bahwa $u_n = ar^{n-1}$

Contoh 5.7

Perhatikan susunan bilangan $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$

Nilai perbandingan $\frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} = \ldots = \frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{1}{2}$. Jika nilai perbandingan dua suku berurutan dimisalkan r dan nilai suku pertama adalah a, maka susunan bilangan tersebut dapat dinyatakan dengan $1, 1\left(\frac{1}{2}\right), \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right), \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right), \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\right), \ldots$

Perhatikan gambar berikut!

Sehingga:

- $u_1 = a = 1$
- $u_2 = u_1.\frac{1}{2} = 1.\frac{1}{2} \leftrightarrow u_2 = u_1.r = a.r$
- $u_3 = u_2.\frac{1}{2} = 1.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = 1.\left(\frac{1}{2}\right)^2 \leftrightarrow u_3 = u_2.r = a.r.r = a.r^2$
- $u_4 = u_3.\frac{1}{2} = 1.\left(\frac{1}{2}\right)^2.\frac{1}{2} = 1.\left(\frac{1}{2}\right)^3 \leftrightarrow u_4 = u_3.r = a.r^2.r = a.r^3$
- $u_5 = u_4.\frac{1}{2} = 1.\left(\frac{1}{2}\right)^3.\frac{1}{2} = 1.\left(\frac{1}{2}\right)^4 \leftrightarrow u_5 = u_4.r = a.r^3.r = a.r^4$

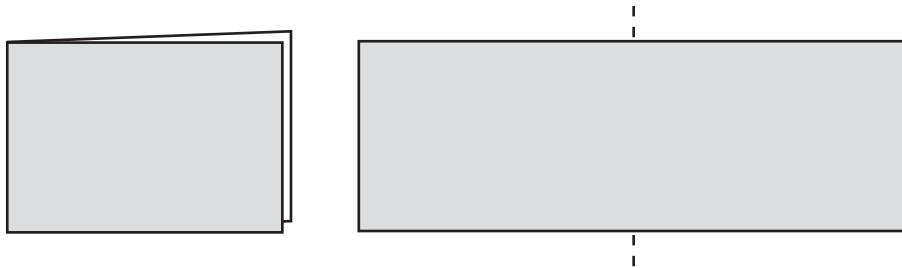
Dari pola di atas, tentunya dengan mudah kamu pahami bahwa,

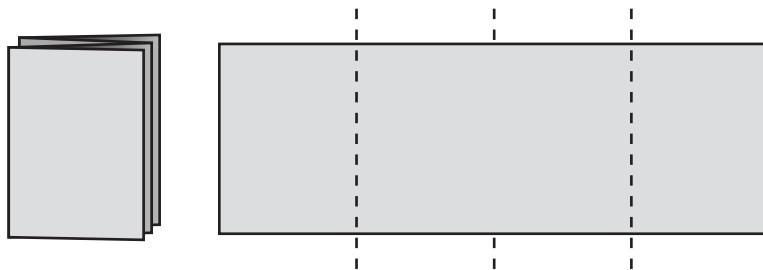
$$u_n = u_{n-1}.r = a.r^{n-2}.r = a.r^{n-1}$$

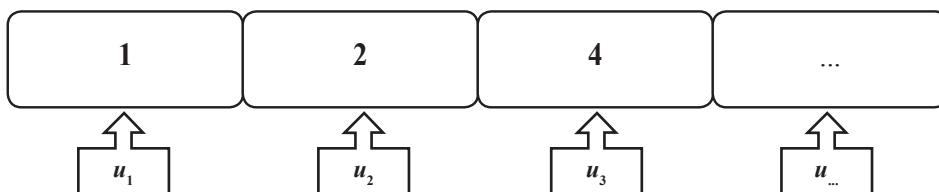
Contoh 5.8

Seorang anak memiliki selembar kertas. Berikut ini disajikan satu bagian kertas.

Gambar 5.9: Selembar Kertas

Ia melipat kertas tersebut menjadi dua bagian yang sama besar. Kertas terbagi menjadi 2 bagian yang sama besar.

Gambar 5.10: Selembar Kertas pada Lipatan Pertama

Kertas yang sedang terlipat ini, kemudian dilipat dua kembali olehnya. Kertas terbagi menjadi 4 bagian yang sama besar.

Gambar 5.11: Selembar Kertas pada Lipatan Kedua

Ia terus melipat dua kertas yang sedang terlipat sebelumnya. Setelah melipat, ia selalu membuka hasil lipatan dan mendapatkan kertas tersebut terbagi menjadi 2 bagian sebelumnya. Sekarang, perhatikan bagian kertas tersebut yang membentuk sebuah barisan bilangan.

Setiap dua suku berurutan dari barisan bilangan tersebut memiliki perbandingan yang sama, yaitu $\frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} = ... = \frac{u_n}{u_{n-1}} = 2.$ Barisan bilangan ini disebut **barisan geometri**.

Definisi 5.2

Barisan geometri adalah barisan bilangan yang nilai pembanding (rasio) antara dua suku yang berurutan selalu tetap.
Rasio, dinotasikan r merupakan nilai perbandingan dua suku berdekatan.
Nilai r dinyatakan: $r = \frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} = \frac{u_4}{u_3} = \ldots = \frac{u_n}{u_{n-1}}$.

Sifat 5.2
Jika $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ merupakan susunan suku-suku barisan geometri, dengan $u_1 = a$ dan r: rasio, maka suku ke-n dinyatakan

$$u_n = a.r^{n-1}, \; n \text{ adalah bilangan asli}$$

Uji Kompetensi 5.2

1. Untuk memeriksa sebuah barisan merupakan barisan geometri apakah cukup hanya dengan menentukan rasio dua suku berturutan? Jelaskan dengan menggunakan contoh!
2. Tentukan rumus suku ke-n dan suku ke-10 dari barisan bilangan di bawah ini!
   a. 1, 4, 16, 24, …
   b. 5, 10, 20, 40, …
   c. 9, 27, 81, 243, …
   d. $\frac{1}{25}, \frac{1}{5}, 1, 5, \ldots$
   e. 81, 27, 9, 3, …
3. Tentukan rasio dan suku pertama dari barisan geometri di bawah ini!
   a. Suku ke-4 = 8 dan suku ke-6 = 729
   b. Suku ke-2 = 6 dan suku ke-5 = 162
   c. $U_3 = 10$ dan $U_6 = 1,25$
4. Selesaikan barisan geometri di bawah ini!
   a. Suku ke-4 = 27 dan suku ke-6 = 243, tentukan suku ke-8
   b. $U_2 = 10$ dan $U_6 = 10$, tentukan U_9
   c. $U_2 = 2\sqrt{2}$ dan $U_5 = 8$, tentukan U_{10}

5. Tentukan hasil dari jumlah bilangan di bawah ini !
   a. $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots$ (sampai 10 suku)
   b. $54 + 18 + 6 + 2 + \ldots$ (sampai 9 suku)
   c. $5 - 15 + 45 - 135 + \ldots$ (sampai 8 suku)
   d. $1 + 1 + 3 + 2 + 9 + 4 + 27 + 8 + \ldots$ (sampai 19 suku)
   e. $8 + 7 + 9 + 3 + \ldots + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} = \ldots$
6. Tiga bilangan membentuk barisan aritmetika. Jika suku ketiga ditambah 3 dan suku kedua dikurangi 1, diperoleh barisan geometri. Jika suku ketiga barisan aritmetika ditambah 8, maka hasilnya menjadi 5 kali suku pertama. Tentukan beda dari barisan aritmetika tersebut!
7. Tiga bilangan positif membentuk barisan geometri dengan rasio $r > 1$. Jika suku tengah ditambah 4, maka terbentuk sebuah barisan aritmetika yang jumlahnya 30. Tentukan hasil kali dari ketiga bilangan tersebut!
8. Sebuah bola jatuh dari ketinggian 8m dan memantul kembali dengan ketinggian $\frac{3}{5}$ kali tinggi sebelumnya. Pemantulan ini berlangsung terus menerus hingga bola berhenti. Berapakah jarak lintasan seluruhnya ?
9. Jika barisan $x_1, x_2, x_3, \ldots$ memenuhi $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = n^3$, untuk semua n bilangan asli, maka $x_{100} = \ldots$
10. Jumlah m suku pertama barisan aritmetika adalah p dan jumlah m suku terakhir barisan aritmetika tersebut adalah q. Tentukan jumlah $4m$ suku pertama barisan tersebut.

Proyek

Himpunlah minimal tiga buah masalah penerapan barisan dan deret geometri dalam bidang fisika, teknologi informasi, dan masalah nyata di sekitarmu. Ujilah berbagai konsep dan aturan barisan dan deret aritmetika di dalam pemecahan masalah tersebut. Buatlah laporan hasil kerjamu dan sajikan di depan kelas!

5.4 Aplikasi Barisan

5.4.1 Pertumbuhan

Masalah 5.6

Seorang peneliti mengamati perkembangan koloni bakteri yang terbentuk setiap jam. Apabila jumlah koloni bakteri mula-mula 100 dan setiap bakteri membelah menjadi dua setiap jam. Peneliti ingin mengetahui jumlah koloni bakteri yang terbentuk dalam waktu 50 jam dan buatlah grafik dari model persamaan yang ditemukan!

Alternatif Penyelesaian:

Misalkan:

$K(0)$ = 100 = Jumlah koloni bakteri mula-mula
$K(50)$ = Jumlah koloni bakteri setelah 50 jam
$K(n)$ = Jumlah koloni bakteri setelah n jam
n = Lamanya waktu berkembang

Karena bakteri membelah menjadi dua maka untuk waktu 50 jam kita dapat membuat tabel perkembangannya seperti berikut ini.

Tabel 5.6: Perkembangan Koloni Bakteri

Waktu (Jam)	Jumlah Koloni Bakteri	Pola Bilangan
1	200	$100 \times 2 = 100 \times 2^1$
2	400	$100 \times 2 \times 2 = 100 \times 2^2$
3	800	$100 \times 2 \times 2 \times 2 = 100 \times 2^3$
...	...	...
n	...	...

Dari hasil pengamatan pada tabel di atas, kita dapat membuat hubungan antara pertumbuhan jumlah bakteri (K) yang terbentuk terhadap perubahan waktu (n) dengan model matematika yang sesuai untuk jumlah koloni bakteri yang terbentuk setelah n jam tersebut, yaitu …?

Contoh 5.9

Penduduk suatu kota metropolitan tercatat 3,25 juta jiwa pada tahun 2008, diperkirakan menjadi 4,5 jiwa pada tahun 2013. Jika tahun 2008 dianggap tahun dasar, berapa persen pertumbuhannya? Berapa jumlah penduduknya pada tahun 2015?

Alternatif Penyelesaian:

Persentase pertumbuhan penduduk:

$$\begin{aligned}
P_n &= P_0 (1 + i)^n \\
4{,}5 &= 3{,}25\ (1 + i)^{2013-2008} \\
4{,}5 &= 3{,}25\ (1 + i)^5 \\
4{,}5/3{,}25 &= (1 + i)^5 \\
1{,}3846 &= (1 + i)^5 \\
1{,}3846^{1/5} &= 1 + i \\
i &= 1{,}3846^{1/5} - 1 \\
i &= 0{,}0673 = 6{,}73\ \%
\end{aligned}$$

Jadi, persentase pertumbuhan penduduknya 6,73%.

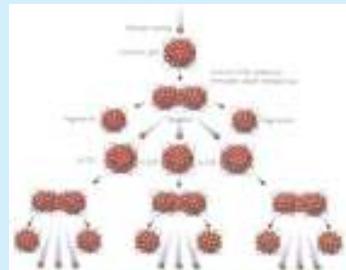
Jumlah penduduk pada tahun 2015.

$$\begin{aligned}
P_{2015} &= P_{2008}\ (1 + i)^{2015-2008} \\
&= 3{,}25\ (1 + 6{,}73\%)^7 \\
&= 3{,}25\ (1{,}577632) = 5{,}13
\end{aligned}$$

Jadi, jumlah penduduk kota metropolitan pada tahun 2015 sebanyak 5,13 juta.

5.4.2 Peluruhan

Masalah 5.7

Suatu neutron dapat pecah mendadak menjadi suatu proton dan elektron dan ini terjadi sedemikian sehingga jika kita memiliki 1.000.000 neutron, kira-kira 5% dari padanya akan berubah pada akhir satu menit. Berapa neutron yang masih ada setelah n menit dan 10 menit?

Alternatif Penyelesaian:

Misalnya banyak neutron adalah M dan persentase peluruhan (penyusutan) sebesar p % tiap menit, maka:

Banyak neutron semula $= M$

Banyak neutron setelah 1 menit $= M - \frac{p}{100}M = M\left(1-\frac{p}{100}\right)$

Banyak neutron setelah 2 menit $= M\left(1-\frac{p}{100}\right) - \frac{p}{100}M\left(1-\frac{p}{100}\right) = M\left(1-\frac{p}{100}\right)^2$

Banyak neutron setelah 3 menit $= M\left(1-\frac{p}{100}\right)^2 - \frac{p}{100}M\left(1-\frac{p}{100}\right)^2 = M\left(1-\frac{p}{100}\right)^3$

Banyak neutron setelah n menit $= M\left(1-\frac{p}{100}\right)^n$

Banyak neutron setiap menitnya membentuk barisan geometri

$$M,\ M\left(1-\frac{p}{100}\right),\ M\left(1-\frac{p}{100}\right)^2,\ M\left(1-\frac{p}{100}\right)^3, \ldots,\ M\left(1-\frac{p}{100}\right)^n$$

$$U_n = M\left(1-\frac{p}{100}\right)^n$$

$U_n = \left(1-\frac{p}{100}\right)U_{n-1}$, dengan $\left(1-\frac{p}{100}\right)$ dinamakan faktor peluruhan

$$U_n = U_1\left(1-\frac{p}{100}\right)^n$$

Dalam kasus ini,

M = 1.000.000

p = 5%, maka

$U_n = 1.000.000\left(1-\frac{5}{100}\right)^n = 1.000.000(0{,}95)^n$,

Dengan faktor peluruhannya = 0,95.

$U_{10} = 1.000.000\ (0{,}95)^{10}$

Log U_{10} = log 1.000.000 + 10 log 0,95

= 6 + 10 (0,9777 – 1) = 5,777

U_{10} = 598.412

Jadi, neutron yang masih ada setelah n menit adalah 1.000.000 $(0{,}95)^n$ dan neutron yang masih ada setelah 10 menit adalah 598.412.

5.4.3 Bunga Majemuk

Masalah 5.8

Ovano menerima uang warisan sebesar Rp70.000.000,00 dari orang tuanya dan berniat untuk menginvestasikan dalam bentuk tabungan di bank selama 5 tahun. Dia menjajaki dua bank yang memiliki sistem pembungaan yang berbeda. Bank BCL menggunakan bunga tunggal sebesar 10% per tahun dan Bank PHP menggunakan majemuk sebesar 9% per tahun. Dari hasil perhitungan pihak bank ia memperoleh ilustrasi investasi sebagai berikut.

BANK BCL			BANK PHP	
Tahun	**Bunga**	**Saldo Uang**	**Bunga2**	**Saldo Uang2**
0	0	Rp70,000,000.00	0	Rp70,000,000.00
1	Rp7,000,000.00	Rp77,000,000.00	Rp6,300,000.00	Rp76,300,000.00
2	Rp7,000,000.00	Rp84,000,000.00	Rp6,867,000.00	Rp83,167,000.00
3	Rp7,000,000.00	Rp91,000,000.00	Rp7,485,030.00	Rp90,652,030.00
4	Rp7,000,000.00	Rp98,000,000.00	Rp8,158,682.70	Rp98,810,712.70
5	Rp7,000,000.00	Rp105,000,000.00	Rp8,892,964.14	Rp107,703,676.84
	Total investasi	Rp105,000,000.00		Rp107,703,676.84

Dari ilustrasi investasi di atas diperoleh kesimpulan bahwa walaupun Bank PHP menawarkan bunga majemuk yang lebih kecil daripada bunga tunggal Bank BCL namun hasil investasi yang dihasilkan adalah lebih besar.
Untuk dapat menemukan penyebab perbedaan bunga majemuk dan tunggal di atas, mari perhatikan masalah-masalah berikut.

Masalah 5.9

Di suatu pameran elektronik Odi mendapatkan dua brosur dari dua toko yang berbeda yang menawarkan kredit laptop berkualitas tinggi. Laptop seharga Rp10.000.000,00 tersebut dapat diangsur selama 5 tahun. Toko OLS menawarkan suku bunga tunggal dan toko Lazadul menawarkan suku bunga majemuk yang masing-masing sebesar 4% per tahun.

Setelah menghitung secara cermat Odi mendapatkan tabel angsuran sebagai berkut.

TOKO OLS			TOKO LAZADUL	
Tahun	**Bunga**	**Angsuran**	**Bunga2**	**Saldo Uang2**
0	0	Rp10,000,000.00	0	Rp10,000,000.00
1	Rp400,000.00	Rp10,400,000.00	Rp400,000.00	Rp10,400,000.00
2	Rp400,000.00	Rp10,800,000.00	Rp416,000.00	Rp10,816,000.00
3	Rp400,000.00	Rp11,200,000.00	Rp32,640.00	Rp11,248,640.00
4	Rp400,000.00	Rp11,600,000.00	Rp449,945.60	Rp11,698,585.60
5	Rp400,000.00	Rp12,000,000.00	Rp467,943.42	Rp12,166,529.02
	Total investasi	Rp12,000,000.00		Rp12,166,529.02

dengan hasil perhitungan di atas akhirnya Odi memilih untuk membeli laptop tersebut pada Toko OLS.

Dari kedua masalah di atas dapat kita rumuskan pola barisan bunga majemuk yakni:
Misal diberikan modal awal/pokok M yang diinvestasikan dengan bunga i per periode. Besar modal pada periode ke-n (Mn) dapat dihitung dengan cara berikut.

$$M_1 = M_0 + M_0 \times i = M_0(1+i)$$

$$M_2 = M_1(1 + i) = [M_0(1 + i)](1 + i) = M_0(1 + i)^2$$

$$M_3 = M_2(1+i) = \left[M_0(1+i)^2\right](1+i) = M_0(1+i)^3$$

$$M_n = M_{n-1}(1+i) = \left[M_0(1+i)^{n-1}\right](1+i) = M_0(1+i)^n$$

Maka besar modal pada waktu n yang diinvestasikan menjadi:

$$M_n = M_0(1+i)^n$$

Contoh 5.10

Yusuf seorang pelajar SMA kelas XI senang menabung uang. Selama ini dia berhasil menabung uangnya sejumlah Rp1.000.000,- di sebuah bank dengan bunga 10% per tahun. Berapa lama Yusuf menyimpan uang tersebut agar menjadi Rp1.464.100,-

Alternatif Penyelesaian:

Diketahui: Modal awal (M_0) = 1.000.000,- dan besar uang tabungan setelah sekian tahun (Mn) = 1.464.100, besar bunga yang disediakan bank untuk satu tahun adalah 10% = 0,1.

Ditanya: Berapa tahun (n) Yusuf menabung agar uangnya menjadi (Mn) = 1.464.100.

Perhatikan pola pertambahan jumlah uang Yusuf setiap akhir tahunnya pada tabel berikut.

Tabel 5.7: Perhitungan besar suku bunga pada setiap akhir tahun t

Akhir Tahun	Bunga Uang (10% × Total Uang)	Total = Modal + Bunga	Pola Total Uang pada saat t
0	0	Rp1.000.000,-	$1.000.000(1+0,1)^0$
1	Rp100.000,-	Rp1.100.000,-	$1.000.000(1+0,1)^1$
2	Rp110.000,-	Rp1.210.000,-	$1.000.000(1+0,1)^2$
3	Rp121.000,-	Rp1.331.000,-	$1.000.000(1+0,1)^3$
4	Rp133.100,-	Rp1.464.100,-	$1.000.000(1+0,1)^4$

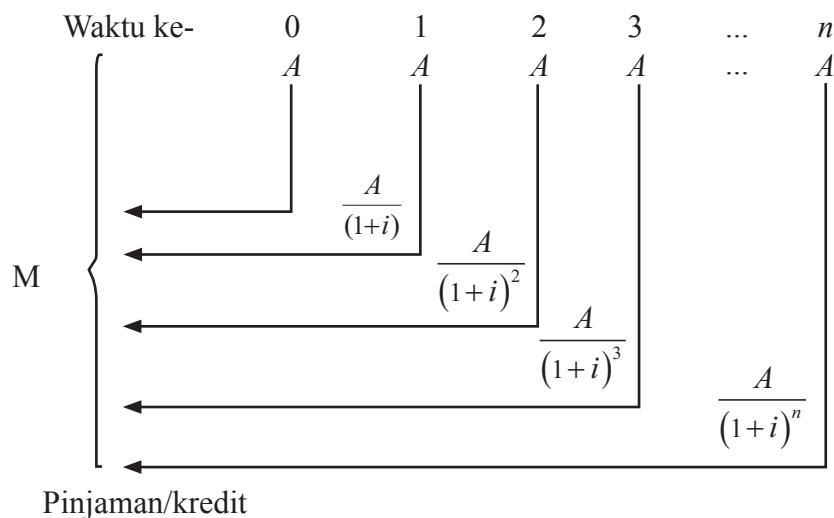
Dari tabel di atas, jelas kita lihat bahwa Yusuf harus menabung selama 4 tahun agar mempunyai uang sebesar Rp1.464.100,-.

5.4.4 Anuitas

Anuitas bukan hal yang baru dalam kehidupan ekonomi semisal sistem pembayaran sewa rumah, atau angsuran kredit (motor, rumah, bank, dll) atau pun uang tabungan kita di bank yang setiap bulan mendapatkan bunga, semuanya merupakan contoh konkret dari anuitas.

Ada dua macam anuitas, yaitu:

1. Anuitas pasti yaitu anuitas yang tanggal pembayarannya mulai dan terakhirnya pasti. Contoh: KPR, kredit bank, kredit mobil, dll.
2. Anuitas tidak pasti, yaitu anuitas yang jangka pembayarannya tidak pasti. Contohnya pembayaran santunan asuransi kecelakaan.

Misalkan modal sebesar M dipinjamkan tunai (*cash*), dengan suku bunga i per periode waktu dan harus dilunasi dalam n anuitas setiap periode waktu. Sebagai catatan, besarnya anuitas selalu tetap. Bagaimana cara menentukan besar anuitas? Misalkan M adalah modal yang dipinjamkan secara tunai dengan suku bunga i (dalam persentase) dan anuitasnya A. Kita dapat membuat gambaran perhitungan anuitas A sebagai berikut.

Dari ilustrasi di atas dapat dibentuk pembayaran anuitas untuk waktu:

Anuitas pertama : $M_1 = \frac{A}{(1+i)}$

Anuitas kedua : $M_2 = \frac{A}{(1+i)} + \frac{A}{(1+i)^2}$

Anuitas ketiga : $M_2 = \frac{A}{(1+i)} + \frac{A}{(1+i)^2} + \frac{A}{(1+i)^3}$

Anuitas ke-n : $M_n = \frac{A}{(1+i)} + \frac{A}{(1+i)^2} + \frac{A}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{A}{(1+i)^n}$

$$M_n = A\left(\frac{1}{(1+i)} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^n}\right)$$

Misalkan: $v = \frac{1}{(1+i)} = (1+i)^{-1}$

diperoleh:

$v + v^2 + v^3 + ... + v^n$ dimana : $v < 1$

$$v + v^2 + v^3 + ... + v^n = \frac{v(1-v^n)}{1-v}$$

$$= \frac{1-v^n}{\frac{1}{v}-1}$$

$$= \frac{1-\left(\frac{1}{1+i}\right)^n}{(1+i)-1}$$

$$= \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Sehingga Anuitas ke-n menjadi:

$$M_n = A\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \quad \Leftrightarrow \quad A = M\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

Dengan:

A = besar anuitas

M = modal/total pinjaman

i = tingkat suku bunga

n = banyaknya anuitas

Contoh 5.11

Ibu Depi membeli sebuah sepeda motor dari dealer yang menggunakan sistem anuitas pada pembayaran kreditnya. Harga motor tersebut adalah Rp10.000.000,00 dengan menggunakan tingkat suku bunga 4% per tahun. Ibu Depi berencana melunaskan kreditnya dengan 6 kali anuitas. Hitunglah besar anuitas yang dibayarkan oleh Ibu Depi?

Alternatif Penyelesaian:

Dari masalah tersebut dapat diketahui :

M = Rp10.000.000,00 ; i = 4% = 0,04 ; n = 6

Maka besar anuitasnya:

$$A = 10.000.000 \times \left(\frac{0,04}{1-(1+0,04)^{-6}} \right)$$

$$A = 10.000.000 \times \left(\frac{0,04}{0,209685474} \right)$$

$$A = 10.000.000 \times (0,190761903) = 1.907.619$$

Maka besar anuitas yang dibayarkan tiap pembayarannya sebesar Rp1.907.619,00.

Uji Kompetensi 5.3

1. Kultur jaringan terhadap 1.500 bakteri yang diuji di laboratorium menunjukkan bahwa satu bakteri dapat membelah diri dalam waktu 2 jam.
   a. Tentukan apakah ini termasuk masalah pertumbuhan atau peluruhan, berikan alasanmu?
   c. Tentukan banyak bakteri setelah 20 jam.
   d. Tentukan banyak bakteri setelah n jam.
2. Pertumbuhan penduduk biasanya dinyatakan dalam persen. Misalnya, pertumbuhan penduduk adalah 2% per tahun artinya jumlah penduduk bertambah sebesar 2% dari jumlah penduduk tahun sebelumnya. Pertambahan penduduk menjadi dua kali setiap 10 tahun. Jumlah penduduk desa pada awalnya 500 orang, berapakah jumlah penduduknya setelah 70 tahun apabila pertumbuhannya 2,5%?
3. Misalnya, pertumbuhan ekonomi suatu negara sebesar 5% per tahun artinya terjadi pertambahan Produk Domestik Bruto (PDB) sebesar 5% dari PDB tahun sebelumnya. Berdasarkan analisis, ekonomi Indonesia akan

mengalami pertumbuhan sebesar 6.5% per tahun selama tiga tahun ke depan. Tentukan PDB pada tahun ketiga apabila PDB tahun ini PDB-nya sebesar 125 triliun rupiah.

4. Kenaikan harga barang-barang disebut inflasi. Berdasarkan analisis, ekonomi Indonesia akan mengalami inflasi sebesar 8% per tahun selama 5 tahun mendatang. Apabila harga emas sekarang ini adalah Rp200.000,00 per gram, tentukan harga emas tersebut empat tahun lagi!
5. Pada percobaan di sebuah laboratorium, temperatur benda diamati setiap menit. Setelah 13 menit suhunya 7º C dan setelah 19 menit suhunya 15ºC. Tentukan kenaikan suhu per menitnya!
6. Keuntungan seorang pedagang asongan bertambah setiap bulan dengan jumlah yang sama. Bila keuntungan sampai bulan keempat Rp30.000,00 dan sampai bulan kedelapan Rp172.000,00 maka keuntungan sampai bulan ke-18?
7. Pada awal bekerja Amat mempunyai gaji Rp200.000,00 per bulan. Tiap tahun gaji Amat naik sebesar Rp15.000,00 per bulan. Berapa gaji Amat setelah dia bekerja selama 7 tahun?
8. Seseorang menabung sejumlah uang di bank dan mendapat bunga majemuk 10% setahun. Satu tahun sesudah menabung dan setiap tahun berikutnya, diambil Rp100.000,00 untuk keperluan hidupnya. Berapakah uang yang harus ditabung sehingga setiap tahun ia dapat mengambil Rp100.000,00?
9. Seseorang menabung Rp800.000,00 pada tahun pertama. Tiap tahun tabungannya ditambah dengan Rp15.000,00 lebih banyak daripada tahun sebelumnya. Berapakah jumlah simpanannya pada akhir tahun ke-10?
10. Bakteri membelah menjadi 2 bagian setiap 4 jam. Jika pada pukul 12.00 banyaknya bakteri 1.000 ekor, Berapa banyaknya bakteri pada pukul 20.00 untuk hari yang sama?

11. Suatu bola jatuh dari ketinggian 72 meter, kemudian memantul di tanah dan memantul kembali 80% dari tinggi semula, begitu seterusnya sampai dengan 6 pantulan. Berapa tinggi bola pada pantulan ke-6?
12. Pada malam tahun baru sebuah organisasi sosial melakukan kegiatan amal berupa pertunjukkan kesenian tradisional dalam rangka membantu korban bencana alam erupsi Sinabung, ruangan tempat duduk untuk para penonton dibagi atas beberapa baris. Masing-masing baris terdiri dari 200 tempat duduk. Harga karcis baris terdepan Rp150.000,00 per orang dan harga kacis baris paling belakang sebesar Rp50.000,00 per orang. Selisih harga karcis untuk tiap baris itu sama. Jika semua karcis habis terjual maka panitia berharap akan memperoleh uang sebesar Rp120.000.000,00. Berapakah harga karcis per orang dari sebelum baris paling belakang?
13. Pada akhir tahun 2005 jumlah penduduk sebuah kota 225.000 jiwa. Jika jumlah penduduk bertambah 20% tiap tahun, maka tentukan jumlah penduduk pada akhir tahun 2010?
14. Badan Pusat Statistik memperkirakan bahwa angka kelahiran bayi di desa Suka Senang setiap bulannya, dari bulan Januari hingga Desember, selama tahun 2008 dapat dinyatakan dengan barisan bilangan 2, 6, 18,… . Nilai suku ke-1, ke-2, sampai ke-12 menyatakan jumlah bayi yang lahir pada bulan Januari, Februari, sampai Desember. Berdasarkan ilustrasi tersebut,
15. Sebuah mobil seharga Rp600.000.000,00,- mengalami penyusutan harga setiap tahun membentuk barisan geometri dengan rasionya adalah $\frac{1}{3}$. Hitunglah harga mobil pada tahun ke-5!

D. Penutup

Beberapa hal penting sebagai kesimpulan dari hasil pembahasan materi barisan, disajikan sebagai berikut.

1. Barisan bilangan adalah sebuah fungsi dengan domainnya himpunan bilangan asli dan rangenya suatu himpunan bagian dari himpunan bilangan real.
2. Barisan aritmetika adalah barisan bilangan yang memiliki beda dua suku berurutan selalu tetap.
3. Barisan geometri adalah barisan bilangan yang memiliki hasil bagi dua suku berurutan adalah tetap. Hasil bagi dua suku berurutan disebut rasio.
4. Masih banyak jenis barisan yang akan kamu pelajari pada jenjang yang lebih tinggi, seperti barisan naik dan turun, barisan harmonik, barisan Fibonacci, dan lain sebagainya. Kamu dapat menggunakan sumber bacaan lain untuk lebih mendalami sifat-sifat barisan.

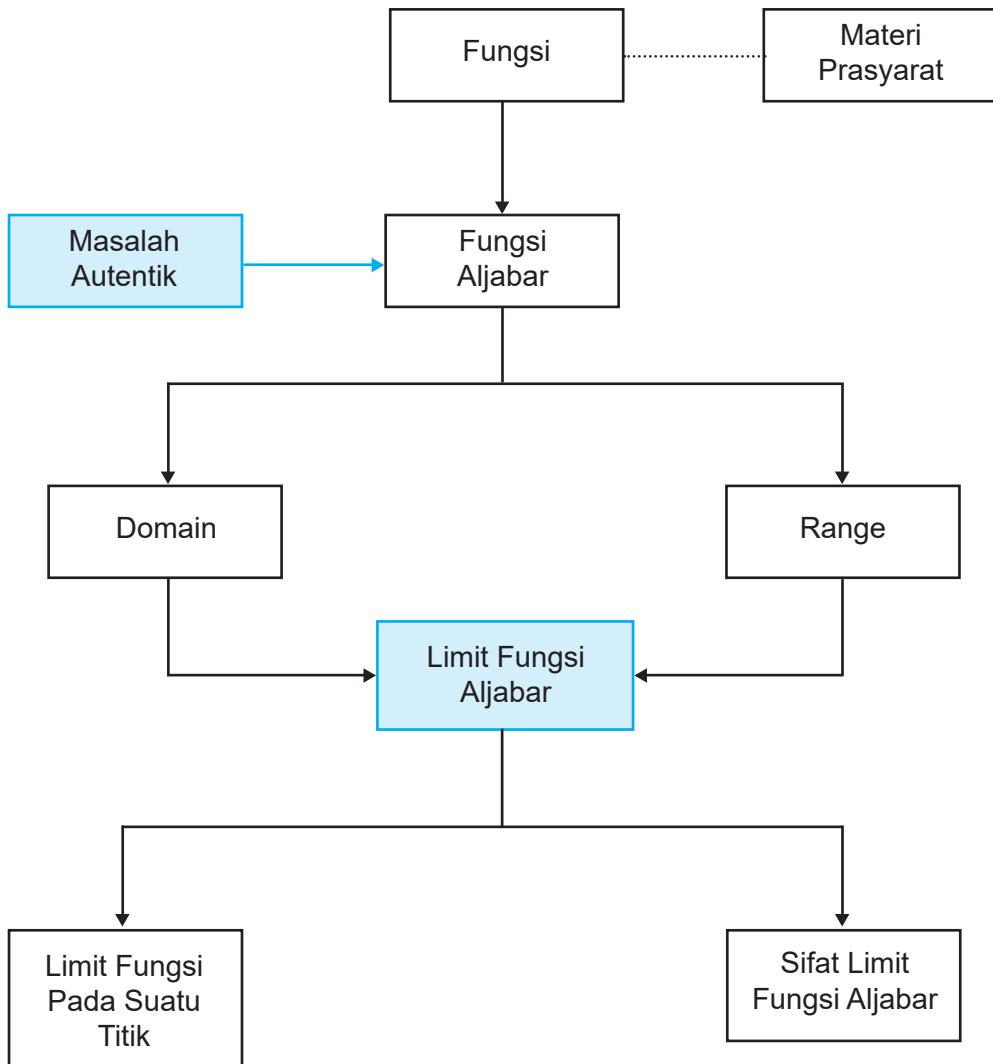
Limit Fungsi

A. Kompetensi Dasar dan Pengalaman Belajar

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
Setelah mengikuti pembelajaran limit fungsi, siswa mampu: 3.7 Menjelaskan limit fungsi aljabar (fungsi polinom dan fungsi rasional) secara intuitif dan sifat-sifatnya, menentukan eksistensinya. 4.7 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan limit fungsi aljabar. 3.9 Menjelaskan limit fungsi aljabar (fungsi polinom dan fungsi rasional) secara intuitif dan sifat-sifatnya, menentukan eksistensi dan menghitungnya. 4.9 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan limit fungsi aljabar.	Melalui pembelajaran materi limit fungsi, siswa memperoleh pengalaman belajar: • Mampu berpikir kreatif. • Mampu berpikir kritis dalam mengamati permasalahan. • Mengajak untuk melakukan penelitian dasar dalam membangun konsep. • Mengajak kerjasama tim dalam menemukan solusi permasalahan. • Mengajak siswa untuk menerapkan matematika dalam kehidupan sehari-hari. • Siswa mampu memodelkan permasalahan.

Istilah Penting

- limit fungsi
- pendekatan (kiri dan kanan)
- bentuk tentu
- bentuk tak tentu

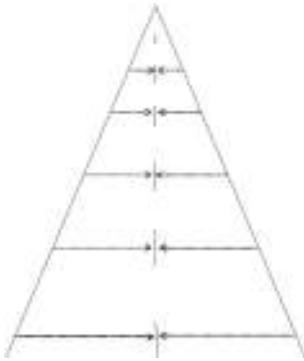
B. Diagram Alir

C. Materi Pembelajaran

Dalam kehidupan sehari-hari, berbagai permasalahan yang kita hadapi dapat melahirkan berbagai konsep matematika. Dengan ditemukan konsep umum matematika maka kita mampu menyelesaikan kembali permasalahan yang serupa. Sebagai contoh, pengamatan yang dilakukan pada respon tubuh yang sedang alergi terhadap suatu zat dengan tingkat dosis obat antibiotik. Berdasarkan data yang diperoleh, memungkinkan ditemukan suatu model batas dosis pemakaian antibiotik tersebut. Dengan demikian, masalah alergi yang serupa dapat diatasi bila terjadi kembali. Percobaan yang kita lakukan adalah sebuah konsep pendekatan terhadap solusi permasalahan tersebut. Jadi, konsep dapat kita peroleh dengan mengamati, mencoba, menganalisis data, dan menarik kesimpulan. Perhatikan ilustrasi berikut.

Gambar 6.1: Jalan raya
Sumber: http://www.grahakartikapesona.com

Seseorang memandang di kejauhan jalan raya yang lurus. Dia melihat kendaraan yang melintas bergerak semakin jauh dan ukuran kendaraan juga seakan-akan semakin kecil. Ini menandakan bahwa kita mempunyai jarak pandang yang terbatas. Bukan hanya jarak pandang yang mempunyai batas, melainkan banyak hal seperti, ambang batas pendengaran, batas kemampuan memikul beban, batas kemampuan masyarakat membeli barang tertentu, dan lain-lain.

Jadi, kita akan memulai pelajaran ini dengan mengkaji istilah "batas" terlebih dahulu. Kasus-kasus apa saja dalam kehidupan sehari-hari yang mempunyai keterbatasan? Coba amati! Sebagai contoh, ambang batas pendengaran, batas kemampuan memikul beban, batas kemampuan masyarakat membeli barang tertentu, dan lain-lain.

Mari kita kaji lebih jauh Gambar 6.1 di atas. Misalkan kita lukis kembali badan jalan tersebut lebih sederhana pada Gambar 6.2.

Gambar 6.2: Sketsa badan jalan

Secara visual pada gambar, badan jalan semakin sempit untuk jarak pandang semakin jauh. Perhatikan, jarak bahu jalan dari kiri dan kanan menyempit menuju tengah jalan. Ada batas ukuran lebar jalan menyempit dari kiri dan kanan ke tengah jalan sesuai dengan sudut pandang kita terhadap jalan tersebut. Berdasarkan ilustrasi tersebut, kita membicarakan kata 'batas' atau 'limit'.

6.1 Konsep Limit Fungsi

6.1.1 Menemukan Konsep Limit Fungsi

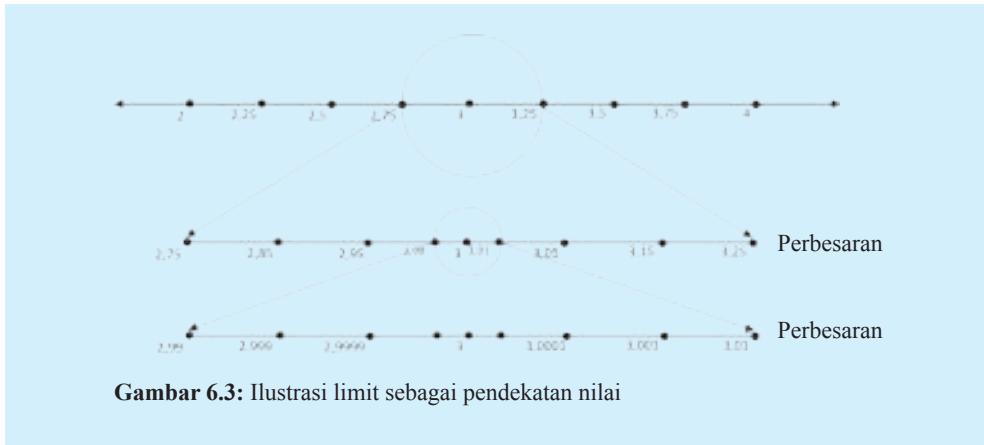
Untuk memperjelas kata 'batas' atau 'limit' pada ilustrasi di atas, kita akan mencoba mencari pengertian atau konsep limit tersebut dengan mengamati permasalahan berikut.

Masalah 6.1

Jika ada pertanyaan: *Bilangan bulat manakah yang terdekat ke bilangan 3*? Tentu saja dengan mudah kita menjawab yaitu bilangan 2 atau 4, bukan? Tetapi, jika pertanyaan diubah menjadi: *Bilangan realmanakah yang terdekat ke bilangan* 3? Tentu tak berhingga banyaknya bilangan real yang dekat ke bilangan 3, tetapi bilangan manakah yang terdekat ke 3?

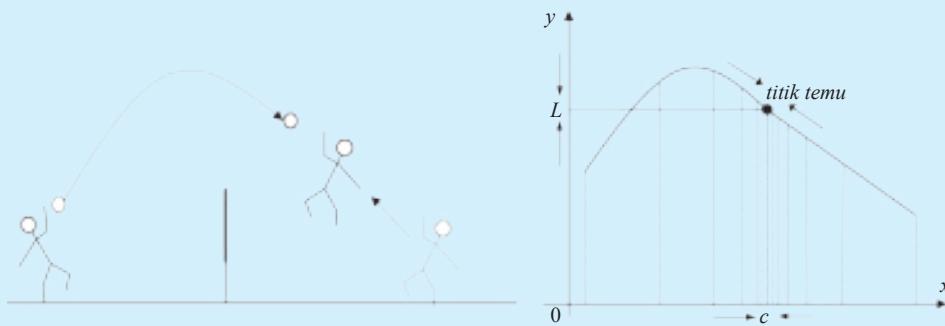
Alternatif Penyelesaian:

Mari kita kaji melalui garis bilangan berikut. Perhatikan gambar!

Gambar 6.3: Ilustrasi limit sebagai pendekatan nilai

Pada garis bilangan pertama, misalkan jawaban akan pertanyan tersebut adalah 2,75 atau 3,25, tetapi itu bukan jawaban yang paling tepat untuk pertanyaan tersebut. Pada garis bilangan kedua, diperoleh bilangan terdekat adalah 2,99 atau 3,01. Namun jawaban tersebut juga masih kurang tepat karena pada garis bilangan ketiga tampak bilangan 2,9999 atau 3,0001. Apakah bilangan 2,9999 atau 3,0001 adalah jawaban yang tepat terhadap pertanyaan di atas? Tentu tidak, karena masih banyak lagi bilangan yang lain yang dekat ke angka 3. Jadi, apakah pengertian dekat pada masalah ini?

Pada garis bilangan, dapat dilihat sekelompok bilangan real mendekati 3 dari kiri dan sekelompok bilangan real lainnya mendekati 3 dari kanan. Namun hanya ada satu bilangan yang terdekat ke 3 dari kiri dan kanan. Jika dimisalkan x sebagai variabel yang dapat menggantikan bilangan-bilangan yang mendekati 3 tersebut maka x akan disebut mendekati 3 (dituliskan $x \to 3$). Jika x adalah semua bilangan yang mendekati 3 dari kiri maka dituliskan $x \to 3^-$ dan sebaliknya jika x adalah semua bilangan-bilangan yang mendekati 3 dari kanan maka dituliskan $x \to 3^+$.

Masalah 6.2

Seorang atlet bola voli sedang melakukan gerakan *smash* terhadap bola yang telah di-*over* menuju ke arahnya. Atlet tersebut melompat dan bergerak menuju bola sehingga pada saat tertentu dia akan menyentuh bola pada ketinggian tertentu, bukan? Atlet tersebut hanya dapat menyentuh bola, jika ketinggian tangannya meraih bola sama dengan ketinggian bola. Jika kita amati kasus ini dengan pendekatan koordinat, dapatkah kamu sketsa detik-detik pergerakan bola dan atlet sampai tangan atlet menyentuh bola? Kita sketsa bersama-sama. Perhatikan gambar!

Gambar 6.4: Sketsa pergerakan bola dan atlet voli

Alternatif Penyelesaian:

Dari gambar dapat dilihat, bahwa bola yang dipukul ke daerah lawan, disambut oleh salah satu atlet sehingga bola dan atlet bergerak saling mendekati dengan arah yang berlawanan sehingga keduanya bertemu atau bersentuhan (titik temu) pada saat tertentu (titik c). Gerakan bola semakin dekat dan sangat dekat ke titik temu, demikian juga atlet bergerak semakin dekat dan sangat dekat ke titik temu. Titik temu keduanya menunjukkan ketinggian bola (titik L) dan atlet adalah sama.

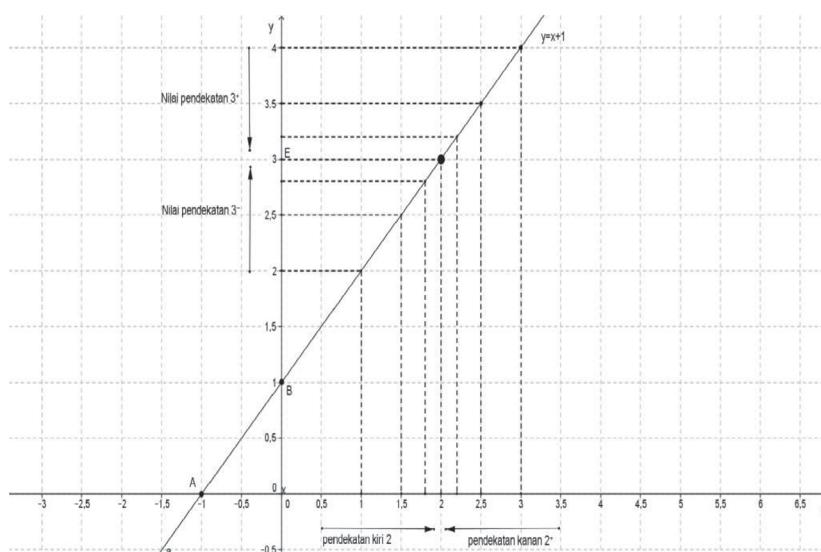
Berdasarkan Masalah 6.2, mari kita kaji lebih jauh gerakan objek tersebut dengan memisalkan gerakan membentuk kurva atau sebuah fungsi. Dengan demikian, kita akan lebih memahami konsep limit secara intuitif.

6.1.2 Pemahaman Intuitif Limit Fungsi

1. Amati fungsi $f(x) = x + 1$ untuk $x \in R$. Kita tentukan nilai fungsi $f(x) = x + 1$ pada saat x mendekati 2 dengan memisalkan $y = f(x)$.

   Tabel 6.1: Nilai fungsi $f(x) = x + 1$ pada saat x mendekati 2

x	1	1,5	1,7	1,9	1,99	1,999	. . .	2	. . .	2,001	2,01	2,1	2,5	2,7	3
y	2	2,5	2,7	2,9	2,99	2,999	. . .	?	. . .	3,001	3,01	3,1	3,5	3,7	4

   Perhatikan sketsa berikut:

Gambar 6.5: Nilai $f(x) = x + 1$ pada saat x mendekati 2 dari kiri dan kanan

Jika kita amati tabel dan sketsa di atas maka ada beberapa hasil pengamatan, sebagai berikut.

- Terdapat tak berhingga bilangan real yang mendekati 2.
- Setiap titik di sumbu x (daerah asal) mempunyai pasangan di sumbu y (*daerah hasil*).
- Setiap nilai pada fungsi mendekati 3 pada saat x mendekati 2.
- Tampak bahwa pendekatan ada dari kiri dan kanan pada tabel dan sketsa.

Secara matematika, nilai-nilai fungsi $f(x) = x + 1$ mendekati 3 pada saat x mendekati 2. Hal ini dapat dinyatakan $\lim\limits_{x\to 2}(x+1) = 3$.

2. Amati fungsi $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ untuk $x \in R, x \neq 1$.

Misalkan $y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = \dfrac{(x+1)(x-1)}{x - 1} = x + 1$ untuk $x \neq 1$. Nilai fungsi $f(x)$ untuk mendekati 1 dapat dilihat pada tabel berikut.

Tabel 6.2: Nilai pendekatan fungsi $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$, $x \neq 1$ pada saat x mendekati 1

x	0	0,5	0,7	0,9	0,99	0,999	. . .	1	. . .	1,001	1,01	1,1	1,5	1,7	2
y	1	1,5	1,7	1,9	1,99	1,999	. . .	?	. . .	2,001	2,01	2,1	2,5	2,7	3

Pada tabel dapat dilihat nilai $f(x)$ akan mendekati 2 pada saat x mendekati 1 dan nilai fungsi tidak tentu pada $x = 1$. Secara matematika dituliskan

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

Perhatikan gambar!

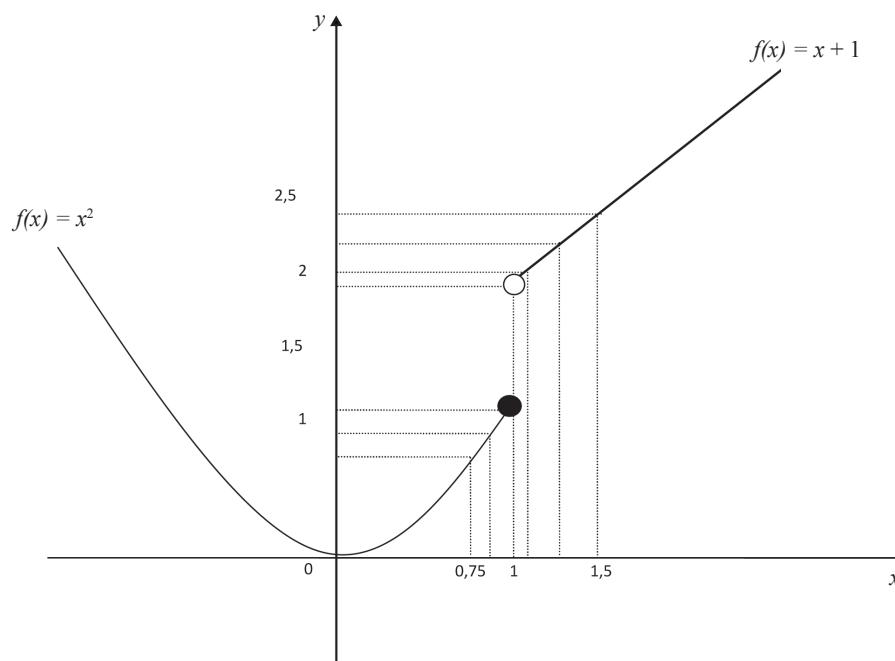
Gambar 6.6: Nilai fungsi $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$, $x \neq 1$ pada saat $x = 1$ didekati 1 dari kiri dan kanan

3. Amati fungsi $f(x) = \begin{cases} x^2 & jika\ x \le 1 \\ x+1 & jika\ x > 1 \end{cases}$. Jika $y = f(x)$ maka nilai $f(x)$ untuk x mendekati 1 dapat dilihat pada tabel berikut.

   Tabel 6.3: Nilai fungsi $f(x) = \begin{cases} x^2 & jika\ x \le 1 \\ x+1 & jika\ x > 1 \end{cases}$ mendekati 2, pada saat x mendekati 1

x	0	0,5	0,7	0,9	0,99	0,999	. . .	1	. . .	1,001	1,01	1,1	1,5	1,7	2
y	0	0,25	0,49	0,81	0,98	0,998	. . .	?	. . .	2,001	2,01	2,1	2,5	2,7	3

   Berdasarkan tabel di atas, nilai fungsi $f(x)$ akan mendekati 1 pada saat x mendekati 1 dari kiri sementara nilai $f(x)$ mendekati 2 pada saat x mendekati 1 dari kanan.

   Perhatikan gambar!

Gambar 6.7: Grafik fungsi $f(x) = \begin{cases} x^2 & jika\ x \le 1 \\ x+1 & jika\ x > 1 \end{cases}$

Dengan demikian fungsi $f(x) = \begin{cases} x^2 & jika\ x \leq 1 \\ x + 1 & jika\ x > 1 \end{cases}$ tidak memiliki limit pada saat x mendekati 1.

Perhatikan definisi limit fungsi berikut!

Definisi 6.1

Misalkan f sebuah fungsi $f : R \rightarrow R$ dan misalkan L dan c anggota himpunan bilangan real.
$\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$ jika dan hanya jika $f(x)$ mendekati L untuk semua x mendekati c.

Catatan:

a. $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$ dibaca limit fungsi $f(x)$ untuk x mendekati c adalah L.

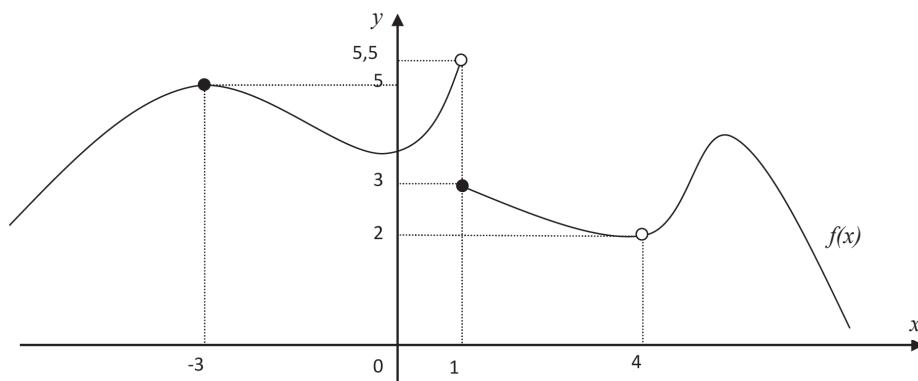
b. Kita menyatakan bahwa $f(x)$ mendekati L ketika x mendekati c yang terdefinisi pada selang/interval yang memuat c kecuali mungkin di c sendiri.

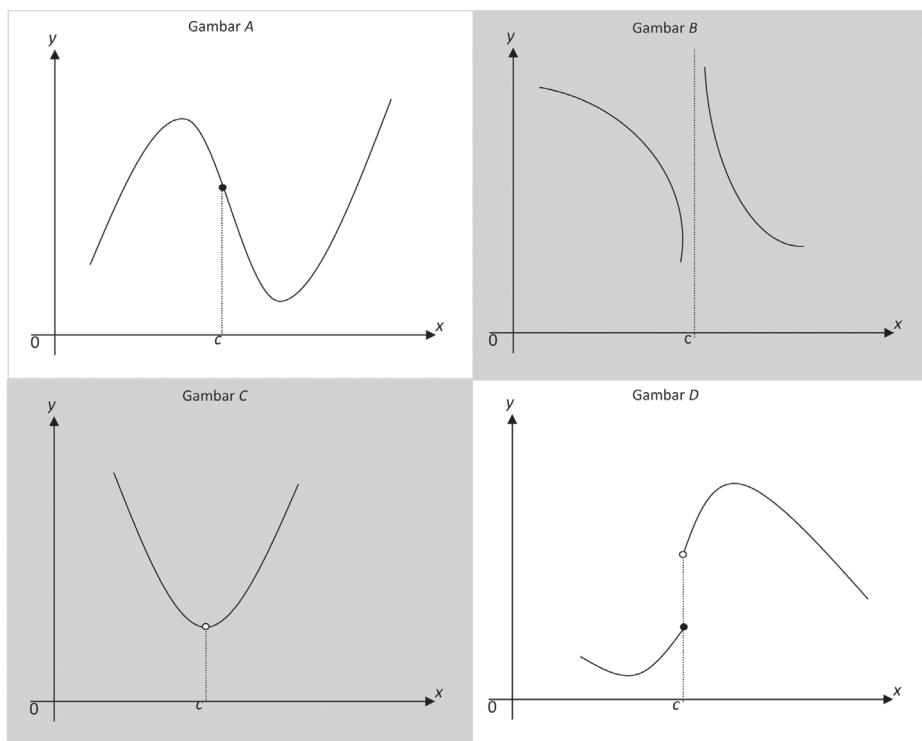
c. Limit fungsi mempunyai sifat: $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$ jika dan hanya jika $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = L = \lim\limits_{x \to c^+} f(x)$.

Latihan 6.1

Coba kamu diskusikan kasus berikut! Perhatikan dan amati beberapa gambar berikut dengan langkah-langkah pengamatan sebagai berikut.

1. Tentukan titik-titik x yang mendekati c dari kiri dan kanan!
2. Tentukan nilai fungsi $f(x)$ untuk x yang mendekati c dari kiri dan kanan!
3. Kemudian amati nilai-nilai $f(x)$ dari kiri dan kanan.

1. Tentukan nilai $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x)$, dan $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x)$ pada gambar berikut! Kemudian tentukan nilai $f(-3)$, $f(1)$,dan $f(4)$ pada gambar berikut! Kemudian tentukan nilai $f(-3)$, $f(1)$, dan $f(4)$!

Gambar 6.8: Grafik fungsi $f(x)$ terkait limit fungsi

2. Gambar manakah yang disebut mempunyai limit pada saat x mendekati c? Jelaskan jawabanmu!

Gambar 6.9: Grafik fungsi $f(x)$ terkait limit fungsi

Contoh 6.1

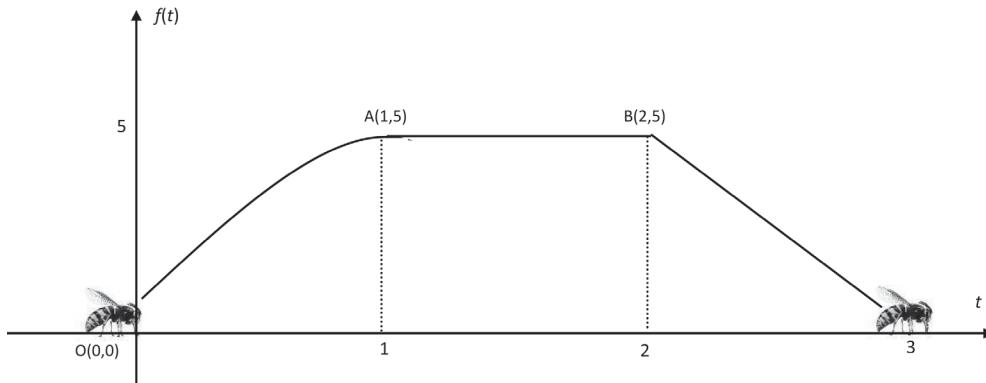
Seekor lebah diamati sedang hinggap di tanah pada sebuah lapangan. Pada keadaan dan interval waktu tertentu, misalkan lebah tersebut terbang mengikuti fungsi berikut:

$$f(t) = \begin{cases} -5t^2 + 10t & jika\ 0 \le t \le 1 \\ 5 & jika\ 1 \le t \le 2 \\ -5t + 15 & jika\ 2 \le t \le 3 \end{cases}$$

Gambar 6.10: Lebah
Sumber http://hafizamri.com

Coba kamu tunjukkan grafik lintasan terbang lebah tersebut dan analisis gerak lebah pada waktu $t = 1$ dan $t = 2$!

Alternatif Penyelesaian:

Perhatikan gambar dari ilustrasi masalah di atas.

Gambar 6.11: Ilustrasi gerakan lebah

Misalkan $y = f(t) = \begin{cases} -5t^2 + 10t & jika\ 0 \le t \le 1 \\ 5 & jika\ 1 \le t \le 2 \\ -5t + 15 & jika\ 2 \le t \le 3 \end{cases}$ sehingga nilai limit fungsi pada saat mendekati $t = 1$ dan $t = 2$ dilihat pada tabel berikut.

Tabel 6.4: Nilai $y = f(t)$ pada saat t mendekati 1.

t	0,7	0,8	0,9	0,99	0,999	. . .	1	. . .	1,001	1,01	1,1	1,2	1,3
$f(t)$	4,55	4,80	4,95	4,9995	5	. . .	5	. . .	5	5	5	5	5

Tabel 6.5: Nilai $y = f(t)$ pada saat t mendekati 2.

t	1,7	1,8	1,9	1,99	1,999	. . .	2	. . .	2,001	2,01	2,1	2,2	2,3
$f(t)$	5	5	5	5	5	. . .	5	. . .	4,995	4,95	4,5	4	3,5

Dari pengamatan pada tabel, dapat dilihat bahwa y mendekati 5 pada saat t mendekati 1 dan y mendekati 5 pada saat t mendekati 2. Dengan perhitungan limit fungsi diperoleh:

I. Untuk t mendekati 1

$\lim_{t \to 1^-}(-5t^2 + 10t) = 5$ (makna $t \to 1^-$ adalah nilai t yang mendekati 1 dari kiri)

$\lim_{t \to 1^+} 5 = 5$ (makna $t \to 1^+$ adalah nilai t yang mendekati 1 dari kanan)

Diperoleh, $\lim_{t \to 1^-}(-5t^2 + 10t) = 5 = \lim_{t \to 1^+} 5$. Dengan demikian, fungsi lintasan lebah mempunyai limit sebesar 5 pada saat t mendekati 1.

II. Untuk t mendekati 2

$\lim_{t \to 2^-} = 5$ (makna $t \to 2^-$ adalah nilai t yang mendekati 2 dari kiri)

$\lim_{t \to 2^+}(-5t + 15) = 5$ (makna $t \to 2^+$ adalah nilai t yang mendekati 2 dari kanan)

Diperoleh, $\lim_{t \to 2^-} 5 = 5 = \lim_{t \to 2^+}(-5t + 15)$. Dengan demikian, fungsi lintasan lebah mempunyai limit sebesar 5 pada saat t mendekati 2.

6.2 Sifat-Sifat Limit Fungsi

Berdasarkan uraian ilustrasi, masalah, dan contoh di atas, secara induktif diperoleh sifat berikut.

Sifat 6.1

Misalkan f sebuah fungsi $f: R \rightarrow R$ dan misalkan L, c bilangan real.
$\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$ jika dan hanya jika $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = L = \lim\limits_{x \to c^-} f(x)$

Kita akan merumuskan sifat-sifat limit fungsi aljabar.

Contoh 6.2

Jika $f(x) = k$ dengan k bilangan real maka tentukan nilai $f(x)$ pada saat x mendekati 1.

Alternatif Penyelesaian:

Misalkan $y = f(x)$ sehingga nilai fungsi disajikan pada tabel berikut.

Tabel 6.6: Nilai $f(x) = k$ pada saat x mendekati 1

x	0	0,2	0,5	0,9	0,99	0,999	. . .	1	. . .	1,001	1,01	1,1	1,5	1,8	2
y	k	k	k	k	k	k	. . .	?	. . .	k	k	k	K	k	k

Jika x mendekati 1 dari kiri dan kanan maka nilai y akan mendekati k.
Secara matematika, ditulis $\lim\limits_{x \to 1^-} k = k = \lim\limits_{x \to 1^+} k$ atau $\lim\limits_{x \to 1} k = k$ (berdasarkan Sifat 6.1).

Sifat 6.2

Misalkan $f(x) = k$ adalah fungsi yang mempunyai nilai limit pada x mendekati c, dengan k dan c adalah bilangan real, maka $\lim\limits_{x \to c} k = k$

Contoh 6.3

Jika $f(x) = x$ maka tentukan nilai $f(x)$ pada saat x mendekati 1.

Alternatif Penyelesaian:

Misalkan $y = f(x) = x$ sehingga nilai fungsi disajikan pada tabel berikut.

Tabel 6.7: Nilai pendekatan $f(x) = x$, pada saat x mendekati 1

x	0	0,2	0,5	0,9	0,99	0,999	...	1	...	1,001	1,01	1,1	1,5	1,8	2
y	0	0,2	0,5	0,9	0,99	0,999	...	?	...	1,001	1,01	1,1	1,5	1,8	2

Jika x mendekati 1 dari kiri dan kanan maka nilai y akan mendekati 2.
Secara matematika, ditulis $\lim\limits_{x \to 1^-} x = 1 = \lim\limits_{x \to 1^+} x$ atau $\lim\limits_{x \to 1} x = 1$ (berdasarkan Sifat 6.1).

Sifat 6.3

Misalkan $f(x) = x$, adalah fungsi yang mempunyai nilai limit pada x mendekati c, dengan c adalah bilangan real, maka $\lim\limits_{x \to c} x = c$

Contoh 6.4

Jika $f(x)= kx$ dengan k adalah konstan maka nilai pendekatan $f(x)$ pada saat x mendekati 1.

Alternatif Penyelesaian:

Misalkan $y = f(x) = kx$ sehingga nilai fungsi disajikan pada tabel berikut.

Tabel 6.8: Nilai pendekatan $f(x) = kx$, pada saat x mendekati 1

x	0	0,5	0,9	0,99	0,999	...	1	...	1,001	1,01	1,1	1,5	2	1,8	2
y	0	0,5k	0,9k	0,99k	0,999k	...	?	...	1,001k	1,01k	1,1k	1,5k	2k	1,8	2

Kita dapat amati $\lim\limits_{x \to 1^-} kx = k = \lim\limits_{x \to 1^+} kx$ atau $\lim\limits_{x \to 1} kx = k$

Jika diuraikan maka:

$\lim\limits_{x \to 1} kx = (k) \lim\limits_{x \to 1} (x) = k.1 = k$ (dimana $\lim\limits_{x \to 1} x = 1$).

Sifat 6.4

Misalkan f adalah fungsi yang mempunyai nilai limit pada x mendekati c, dengan c adalah bilangan real, maka maka $\lim_{x \to c}[kf(x)] = k[\lim_{x \to c} f(x)]$

Contoh 6.5

Jika $f(x) = kx^2$ dengan k adalah konstan maka nilai pendekatan $f(x)$ pada saat x mendekati 1.

Alternatif Penyelesaian:

Misalkan $y = f(x) = kx^2$ sehingga nilai fungsi disajikan pada tabel berikut.

Tabel 6.9: Nilai pendekatan $f(x) = kx^2$ dengan k adalah konstan pada saat x mendekati 1

x	0	0,2	0,5	0,9	0,99	0,999	...	1	...	1,001	1,01	1,1	1,5	1,8	2
y	0	0,01k	0,25k	0,81k	0,9801k	0,998001k	...	?	...	1,002001k	1,0201k	1,21k	2,25k	3,24k	4k

Kita dapat amati $\lim_{x \to 1^-} kx^2 = k = \lim_{x \to 1^+} kx^2$ atau $\lim_{x \to 1} kx^2 = k$. Bila diuraikan prosesnya maka,

$$\lim_{x \to 1}(2x^2) = \lim_{x \to 1} (2)\,(x)\,(x) = \lim_{x \to 1}(2) \lim_{x \to 1}(x) \lim_{x \to 1}(x) = 2.1.1 = 2$$

atau

$$\lim_{x \to 1}(2x^2) = \lim_{x \to 1} (2)\,(x^2) = \lim_{x \to 1}(2) \lim_{x \to 1}(x^2) = 2.1^2 = 2$$

atau

$$\lim_{x \to 1}(2x^2) = \lim_{x \to 1} (2x)\,(x) = \lim_{x \to 1}(2x) \lim_{x \to 1}(x) = 2.1 = 2.$$

Sifat 6.5

Misalkan f, g adalah fungsi yang mempunyai nilai limit pada x mendekati c,

$\lim_{x \to c}[f(x)g(x)] = [\lim_{x \to c} f(x)]\,[\lim_{x \to c} g(x)]$

Contoh 6.6

1. Jika $f(x) = x^2 - 4x$ maka tentukan nilai pendekatan $f(x)$ pada saat x mendekati 1.

   Alternatif Penyelesaian:

   Misalkan $y = f(x) = x^2 - 4x$ sehingga nilai fungsi disajikan pada tabel berikut.

   Tabel 6.10: Nilai $f(x) = x^2 - 4x$ pada saat x mendekati 1

x	0	0,5	0,9	0,99	0,999	. . .	1	. . .	1,001	1,01	1,1	1,5	2
y	0	–1,75	–2,79	–2,98	–2,998	. . .	?	. . .	–3,002	–3,02	–3,19	–3,75	–4

   Kita dapat amati $\lim_{x \to 1^-}[x^2 - 4x] = -3 = \lim_{x \to 1^+}[x^2 - 4x]$ atau $\lim_{x \to 1}[x^2 - 4x] = -3$.

   Bila diuraikan proses dengan kaitannya dengan $\lim_{x \to 1} x^2 = 1$ dan $\lim_{x \to 1} 4x = 4$ maka,

   $\lim_{x \to 1}[x^2 - 4x] = \lim_{x \to 1}[(x^2) - (4x)]$

   $= \lim_{x \to 1}(x^2) - \lim_{x \to 1}(4x)$

   $= (1) - (4)$

   $= -3.$

2. Jika $f(x) = x^2 + 4x$ maka tentukan nilai $f(x)$ pada saat x mendekati 1.

   Alternatif Penyelesaian:

   Tabel 6.11: Nilai $f(x) = x^2 + 4x$ pada saat x mendekati 1

x	0	0,5	0,9	0,99	0,999	. . .	1	. . .	1,001	1,01	1,1	1,5	2
y	0	2,25	4,41	4,94	4,99	. . .	?	. . .	5,01	5,06	5,61	8,25	12

Kita dapat amati $\lim_{x\to 1^-} [x^2 + 4x] = 5 = \lim_{x\to 1^+} [x^2 + 4x]$ atau $\lim_{x\to 1} [x^2 + 4x] = 5$.
Bila diuraikan proses dengan kaitannya dengan $\lim_{x\to 1} x^2 = 1$ dan $\lim_{x\to 1} 4x = 4$ maka,

$$\lim_{x\to 1} [x^2 + 4x] = \lim_{x\to 1} [(x^2) + (4x)]$$

$$= \lim_{x\to 1} (x^2) + \lim_{x\to 1} (4x)$$

$$= (1) + (4)$$

$$= 5.$$

Sifat 6.6

Misalkan f, g adalah fungsi yang mempunyai nilai limit pada x mendekati c,

$$\lim_{x\to c}[f(x) \pm g(x)] = [\lim_{x\to c} f(x)] \pm [\lim_{x\to c} g(x)]$$

Contoh 6.7

Jika $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x}{2x^2 + x}$ maka tentukan nilai $f(x)$ pada saat x mendekati 1.

Alternatif Penyelesaian:

Misalkan $y = f(x) = \dfrac{x^2 + 4x}{2x^2 + x}$ sehingga nilai fungsi disajikan pada tabel berikut.

Tabel 6.12: Nilai $f(x) = f(x) = \dfrac{x^2 + 4x}{2x^2 + x}$ pada saat x mendekati 1

x	0,1	0,7	0,9	0,99	0,999	. . .	1	. . .	1,001	1,01	1,1	1,5	1,7
y	3,42	1,96	1,75	1,67	1,67	. . .	?	. . .	1,67	1,66	1,59	1,38	1,30

Kita dapat amati $\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 + 4x}{2x^2 + x} = 1{,}67 = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 + 4x}{2x^2 + x}$ atau $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 4x}{2x^2 + x}$ $= 1{,}67$. Bila diuraikan proses dengan kaitannya dengan $\lim_{x \to 1}[x^2 + 4x] = 5$ dan $\lim_{x \to 1}[2x^2 + x] = 3$ maka,

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 + 4x}{2x^2 + x} = \frac{\lim_{x \to 1}(x^2 + 4x)}{\lim_{x \to 1}(2x^2 + x)} = \frac{5}{3} \text{ atau } 1{,}67.$$

Sifat 6.7

Misalkan f, g adalah fungsi yang mempunyai nilai limit pada x mendekati c, dengan c adalah bilangan real, maka $\lim_{x \to c} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \to c} f(x)}{\lim_{x \to c} g(x)} = \lim_{x \to c} g(x) \neq 0$

Contoh 6.8

Jika $f(x) = 8x^3$ maka tentukan nilai $f(x)$ pada saat x mendekati 1.

Alternatif Penyelesaian:

Misalkan $y = f(x) = 8x^3$ sehingga nilai fungsi disajikan pada tabel berikut.

Tabel 6.13: Nilai $f(x) = 8x^3$ pada saat x mendekati 1

x	0,1	0,7	0,9	0,99	0,999	...	1	...	1,001	1,01	1,1	1,5	1,7
y	0,08	2,74	5,83	7,76	7,98	...	?	...	8,02	8,24	10,65	27	39,30

Kita dapat amati $\lim_{x \to 1^-} 8x^3 = 8 = \lim_{x \to 1^+} 8x^3$ atau $\lim_{x \to 1} 8x^3 = 8$. Bila diuraikan proses dengan kaitannya dengan $\lim_{x \to 1} 2x = 2$ maka,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} 8x^3 &= \lim_{x\to 1}(2x)^3\\ &= \lim_{x\to 1}(2x)(2x)(2x)\\ &= (\lim_{x\to 1}2x)(\lim_{x\to 1}2x)(\lim_{x\to 1}2x)\\ &= (\lim_{x\to 1}2x)^3\\ &= (2)^3\\ &= 8.\end{aligned}$$

Sifat 6.8

Misalkan f adalah fungsi yang mempunyai nilai limit pada x mendekati c, dengan c adalah bilangan real dan n adalah bilangan positif.

$$\lim_{x\to c}[f(x)]^n = [\lim_{x\to c} f(x)]^n$$

Latihan 6.2

Tunjukkan dengan pendekatan nilai $\lim_{x\to 2} x = \lim_{x\to 2}\left(\sqrt[3]{x}\right)^3$!

Uji Kompetensi 6.1

1. Tunjukkan dengan pendekatan nilai pada limit fungsi berikut:

   a. $\lim_{x\to 2} 6x^3 = (\lim_{x\to 2} 2x)(\lim_{x\to 2} 3x^2)$

   b. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2+4}{2x} = \dfrac{(\lim_{x\to 2} x)^2 + (\lim_{x\to 2} 4)}{(\lim_{x\to 2} 2) + (\lim_{x\to 2} x)}$

   c. $\lim_{x\to 2}(2x+5)^2 = (\lim_{x\to 2} 2x + \lim_{x\to 2} 5)^2$.

2. Tunjukkan dengan gambar dan pendekatan nilai fungsi pada saat pendekatan ke 2 dari kiri dan kanan:

   a. $\lim_{x \to 2} x = 2$

   b. $\lim_{x \to 2} 6x = 12$

   c. $\lim_{x \to 2} (6 + x) = 8$

   d. $\lim_{x \to 2} 6x^2 = 24$

   e. $\lim_{x \to 2} \frac{6}{x} = 3.$

3. Tunjukkan pada gambar berikut, fungsi $y = f(x)$ mempunyai nilai limit atau tidak pada saat x mendekati c! Berikan alasan!

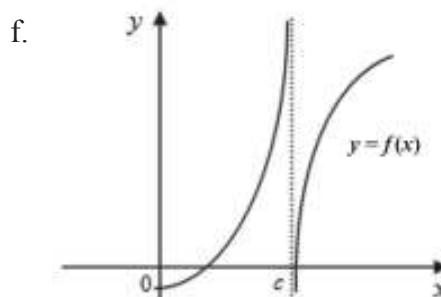
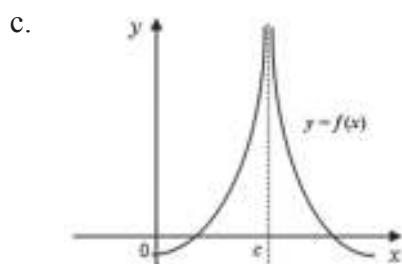
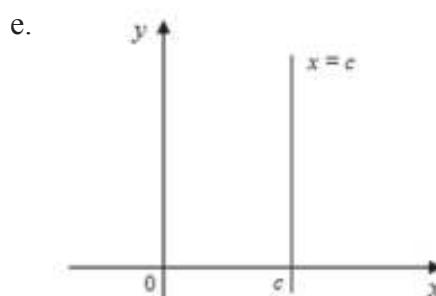
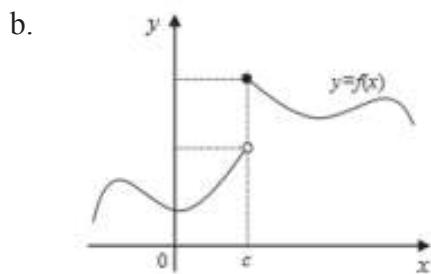
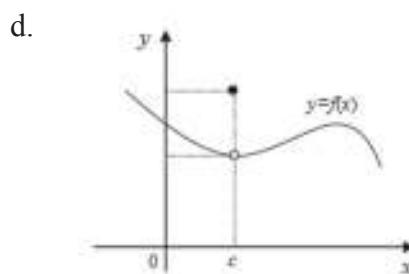
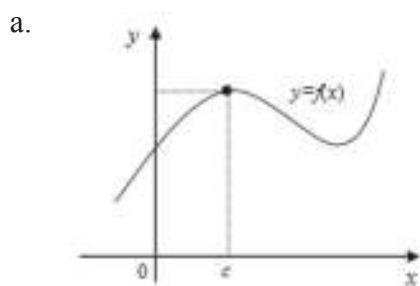
a.

d.

b.

e.

c.

f.

4. Jika L, K adalah bilangan real dan $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$, $\lim\limits_{x\to c} g(x) = K$ maka tentukan:

   a. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x)+2}{f(x)-2}$

   b. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f^2(x)-L^2}{f^2(x)+L^2}$

   c. $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{f(x)-g(x)}{f(x)+g(x)}\right)^2$.

5. Tunjukkan dengan gambar, nilai pendekatan dari fungsi-fungsi berikut:

   a. $\lim\limits_{x\to 2} (x+2)$

   b. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$

   c. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x}$

   d. Jika $f(x) = \begin{cases} x+2 & jika\ x \leq 1 \\ 4-x & jika\ x \geq 1 \end{cases}$ maka tunjukkan $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

   e. Jika $f(x) = \begin{cases} x+1 & jika\ x < 1 \\ x^2+1 & jika\ x \geq 1 \end{cases}$ maka tunjukkan $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

6. Tuliskan dan tunjukkan sifat-sifat limit yang mana saja dapat digunakan untuk menyelesaikan limit fungsi berikut?

   a. $\lim\limits_{x\to 1} (3x^2 - 4)$

   b. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-4}{x+4}$

   c. $\lim\limits_{x\to 1} (2x-1)^4$.

6.3 Menentukan Nilai Limit Fungsi

Pada bagian ini, kita akan menentukan nilai limit suatu fungsi aljabar dengan menggunakan metode ataupun strategi. Perlu kamu ingat, fungsi dapat terdefinisi pada $x = c$, dan dapat juga tidak terdefinisi pada saat $x = c$. Untuk itu, nilai $f(c)$ akan mempunyai bentuk tak tentu, seperti $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, ∞^{∞} dan lain-lain. Bentuk-bentuk ini bukan nilai limit fungsi yang dimaksud. Oleh karena itu, misi kita adalah mencari bentuk tentu dari limit fungsi tersebut. Perhatikan langkah-langkah berikut:

1. Substitusikan $x = c$ ke fungsi $f(x)$ sehingga diperoleh $f(c) = L$. (L = nilai tentu).
2. Jika L merupakan salah satu bentuk tak tentu maka kita harus mencari bentuk tentu limit fungsi tersebut dengan memilih strategi: mencari beberapa titik pendekatan, dan memfaktorkan.

Berikut adalah contoh fungsi yang terdefinisi atau tidak terdefinisi pada suatu pendekatan tertentu.

1. Fungsi $f(x) = x^3 + 1$ mempunyai bentuk tentu pada $x = 1$ karena $f(1) = 2$. Dengan demikian, nilai limit fungsi pada $x = 1$ adalah 2.
2. Fungsi $f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$ mempunyai bentuk tak tentu pada $x = 1$ dan $x = -1$ karena $f(c) = \dfrac{0}{0}$ atau $f(-1) = \dfrac{0}{0}$. Dengan demikian, dibutuhkan strategi untuk mencari nilai limit fungsi pada $x = 1$ dan $x = -1$.

Perhatikan beberapa contoh soal dan penyelesaian berikut.

Contoh 6.9

Tentukan nilai $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$

Alternatif Penyelesaian:

Cara I (*Numerik*)

Jika $y = f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$ maka pendekatan fungsi pada saat x mendekati 2 ditunjukkan pada tabel berikut:

Tabel 6.14: Nilai pendekatan $y = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$ pada saat x mendekati 2

x	1,5	1,7	1,9	1,99	1,999	2	2,001	2,01	2,1	2,3	2,5
y	0,143	0,189	0,231	0,248	0,250	0/0	0,250	0,252	0,268	0,302	0,333

Pada tabel, fungsi $y = f(x)$ akan mendekati 0,25 untuk x mendekati 2.

Cara II (Faktorisasi)

Perhatikan bahwa $f(2) = \dfrac{0}{0}$ adalah bentuk tak tentu sehingga diperlukan strategi pergantian dengan faktorisasi sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} &= \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+2)}\\ &= \lim_{x\to 2}\frac{x-1}{x+2} \text{ karena } x \neq 2\\ &= \frac{1}{4} \text{ atau } 0{,}25.\end{aligned}$$

Contoh 6.10

Tentukan nilai $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$ dan $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$.

Nilai fungsi tersebut adalah bentuk tak tentu pada absis 1 dan –1 sehingga perlu strategi pergantian dengan faktorisasi!

Alternatif Penyelesaian:

Cara I (*Numerik*)

Jika $y = \dfrac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$ maka pendekatan fungsi pada saat x mendekati 1 dan –1 ditunjukkan pada tabel berikut:

Tabel 6.15: Nilai pendekatan $f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$ pada saat x mendekati 1

x	0,7	0,8	0,9	0,99	0,999	1	1,001	1,01	1,1	1,2	1,3
y	1,49	1,64	1,81	1,98	2,00	?	2,00	2,02	2,21	2,44	2,69

Tabel 6.16: Nilai pendekatan $f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$ pada saat x mendekati -1

x	$-1{,}3$	$-1{,}2$	$-1{,}1$	$-1{,}01$	$-1{,}001$	-1	$-0{,}999$	$-0{,}99$	$-0{,}9$	$-0{,}8$	$-0{,}7$
y	2,69	2,44	2,21	2,02	2,00	?	2,00	1,98	1,81	1,64	1,49

Dengan melihat tabel-tabel di atas, jika x mendekati 1 maka $f(x)$ akan mendekati 2 dan jika x mendekati -1 maka $f(x)$ akan mendekati 2.

Cara II (Faktorisasi)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^4 - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x^2+1)(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \lim_{x\to 1}(x^2+1) \qquad \text{karena } x \neq 1 \text{ dan } x \neq -1$$

$$= \lim_{x\to 1}(-1)^2 + 1$$

$$= 2$$

dan

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^4 - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x\to -1}\frac{(x^2+1)(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \lim_{x\to -1}(x^2+1) \qquad \text{karena } x \neq 1 \text{ dan } x \neq -1$$

$$= \lim_{x\to -1}(-1)^2 + 1$$

$$= 2.$$

Latihan 6.3

Tentukan nilai $\lim_{x\to 1}\dfrac{(3x-1)^3 - (x+1)^3}{x^3 - 1}$ dengan menunjukkan pendekatan nilai dan proses pergantian fungsi dengan faktorisasi.

Cara I (*Numerik*)

Petunjuk

1. Lengkapilah tabel di bawah ini.
2. Amati pergerakan nilai dari kiri dan kanan pada saat mendekati 1 di sumbu x.
3. Amati pergerakan nilai dari kiri dan kanan pada saat mendekati $f(1)$ di sumbu y.
4. Tentukan nilai limit fungsi.

Misalkan $y = \frac{(3x-1)^3 - (x+1)^3}{x^3 - 1}$ maka pendekatan fungsi pada saat x mendekati 1 ditunjukkan pada tabel berikut:

Tabel 6.17 Nilai pendekatan $f(x) = \frac{(3x-1)^3 - (x+1)^3}{x^3 - 1}$ pada saat x mendekati 1

x	0,5	0,9	0,95	0,99	0,999	...	1	...	1,001	1,01	1,05	1,1	1,5
y	...	...	...	...	...	...	0/0	...	...	...	...	...	...

Cara II (Faktorisasi)

$$\lim_{x\to 1} \frac{(3x-1)^3 - (x+1)^3}{x^3 - 1}$$

Langkah 1. Jabarkan fungsi-fungsi di pembilang dan faktorkan fungsi di penyebut

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(\ldots x^3 - \ldots x^2 + \ldots x - \ldots) - (\ldots x^3 + \ldots x^2 + \ldots x + \ldots)}{(x-1)(\ldots)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\ldots x^3 - \ldots x^2 + \ldots x - \ldots}{(x-1)(\ldots)}$$

Langkah 2. Faktorkan fungsi di pembilang

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(\ldots)}{(x-1)(\ldots)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\ldots}{\ldots} \qquad \text{karena } x \neq 1$$

$= \ldots.$

Contoh 6.11

Tentukan nilai $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[5]{x} - \sqrt[3]{x}}{1 - \sqrt[15]{x}}$.

Alternatif penyelesaian:

Dengan memisalkan $x = y^{15}$ maka $x \to 1$ menjadi $y \to 1$ sehingga:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[5]{x} - \sqrt[3]{x}}{1 - \sqrt[15]{x}} &= \lim_{y \to 1} \frac{\sqrt[5]{y^{15}} - \sqrt[3]{y^{15}}}{1 - \sqrt[15]{y^{15}}} \\
&= \lim_{y \to 1} \frac{y^3 - y^5}{1 - y} \\
&= \lim_{y \to 1} \frac{y^3(1 + y)(1 - y)}{1 - y} \\
&= \lim_{y \to 1} y^3(1 + y) \qquad \text{karena } y \neq 1 \\
&= 1(2) \text{ atau } 2.
\end{aligned}$$

Contoh 6.12

Sebuah bidang logam dipanaskan di bagian tengah dan memuai sehingga mengalami pertambahan luas sebagai fungsi waktu $f(t) = 0{,}25t^2 + 0{,}5t$ (cm^2). Tentukan kecepatan perubahan pertambahan luas bidang tersebut pada saat $t = 5$ menit.

Alternatif penyelesaian 1:

Kecepatan perubahan pertambahan luas adalah besar pertambahan luas dibandingkan dengan besar selisih waktu. Perhatikan tabel!

Tabel 6.18: Nilai pendekatan $f(t) = 0{,}25t^2 + 0{,}5t$ (cm^2) pada saat t mendekati 5

t	Δt = t–5	Δf = f(t)-f(5)	Δf /Δt
1	-4	-8	2
2	-3	-6,75	2,25
3	-2	-5	2,5
4	-1	-2,75	2,75

t	$\Delta t = t-5$	$\Delta f = f(t)-f(5)$	$\Delta f / \Delta t$
4,5	-0,5	-1,4375	2,875
4,9	-0,1	-0,2975	2,975
4,99	-0,01	-0,029975	2,9975
4,999	-0,001	-0,00299975	2,99975
4,9999	-0,0001	-0,000299997	2,999975
5	0,0000	0	?
5,0001	0,0001	0,000300002	3,000025
5,001	0,001	0,00300025	3,00025
5,01	0,01	0,030025	3,0025
5,1	0,1	0,3025	3,025
5,5	0,5	1,5625	3,125
6	1	3,25	3,25

Dengan melihat tabel di atas, pada saat t mendekati 5 maka Δt mendekati 0 dan $f(t)$ akan mendekati 3 (cm^2/menit).

Alternatif Penyelesaian 2: (Dikerjakan sebagai Latihan)

$f(t) = 0{,}25t^2 + 0{,}5t$

$$\lim_{t\to 5}\frac{f(t)-f(5)}{t-5} = \lim_{t\to 5}\frac{(0{,}25t^2+0{,}5t)-(\ldots)}{t-5}$$

$$= \lim_{t\to 5}\frac{\cdots}{t-5} = \lim_{t\to 5}\frac{0{,}5(\ldots)}{t-5}$$

$$= \lim_{t\to 5}\frac{0{,}5(\ldots)(t-5)}{t-5} \qquad \text{karena } t \neq 1$$

$$= \lim_{t\to 5} 0{,}5(\ldots) = \ldots$$

Alternatif Penyelesaian 3: (Dikerjakan sebagai Latihan)

Petunjuk: Jika t diganti menjadi $T + 5$.

Uji Kompetensi 6.2

1. Selidiki fungsi tersebut mempunyai limit atau tidak, berikan alasan!

   a. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 1}{x - 2}$

   b. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$

   c. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{|x - 1|}{x - 1}$

   d. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x}}{x}$

   e. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \sqrt{x}}{x - \sqrt{x}}$.

2. Dengan menggunakan strategi, tentukan nilai limit fungsi berikut:

   a. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 2x - 3}{2x - 3}$

   b. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2x^2 - x - 3}{x^2 - 3}$

   c. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 4}$

   d. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^4 - 4x^2}{x^2 + x - 6}$

   e. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{x^2 - 4x^2}{x^2 + x - 2} \right)^3$.

3. Sketsa dan analisis limit fungsi di $x = -1$ dan $x = 1$

a. $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{jika } x \geq 1 \\ 2 & \text{jika } 1 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{jika } x \leq -1 \end{cases}$

b. $f(x) = \begin{cases} 4 & \text{jika } x \geq 1 \\ 2x + 2 & \text{jika } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{jika } x \leq -1 \end{cases}$

c. $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{jika } x \geq 1 \\ 3 - x & \text{jika } -1 < x < 1 \\ -4x & \text{jika } x \leq -1 \end{cases}$

d. $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{jika } x \geq 1 \\ 3x & \text{jika } -1 \leq x < 1 \\ x^2 & \text{jika } x \leq -1 \end{cases}$

e. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{jika } x \geq 1 \\ 2 & \text{jika } -1 \leq x < 1 \\ 2 - x & \text{jika } x \leq -1 \end{cases}$.

4. Sebuah garis $y - 2x - 3 = 0$ menyinggung kurva $y = x^2 + x + 2$.
   a. Coba kamu tunjukkan koordinat pendekatan kedua kurva (titik singgung). Gunakan strategi numerik untuk mendapatkannya!
   b. Carilah metode lain untuk mendapatkan titik singgung tersebut!
   c. Sketsalah permasalahan tersebut!

5. Tentukan nilai limit fungsi berikut!
   a. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1}$ dengan memisalkan $x = t^2$.
   b. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3}$ dengan memisalkan $x = t^2 - 1$.
   c. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x}}{\sqrt[6]{x} - \sqrt{x}}$ dengan memisalkan $x = t^{12}$.

6. Tentukan nilai limit fungsi berikut dengan menggunakan dua atau lebih metode penyelesaian! Bandingkan jawaban yang Anda peroleh!

   a. Jika $f(x) = 3x^2$ maka tentukan $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+2h)-f(x)}{h}$

   b. Jika $f(x) = 3x^2$ maka tentukan $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+2h)-f(x-2h)}{h}$

   c. Jika $f(x) = 3x^2$ maka tentukan $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+4h)-f(x+2h)}{3h}$.

7. Jika fungsi $f(x)$ memenuhi $f(x) - 2f\left(\frac{2013}{2} - x\right) = x$ maka tentukan nilai $\lim_{x\to 2013} \left(\frac{3f(x)}{x-2013}\right)^{2013}$.

D. Penutup

Setelah kita membahas materi limit ini, terdapat beberapa hal penting yang menjadi kesimpulan dari hasil penemuan berbagai konsep dan aturan tentang limit, disajikan sebagai berikut.

1. Penentuan limit suatu fungsi di suatu titik c, sangat bergantung pada kedudukan titik c dan domain fungsi tersebut. Dalam pembahasan limit fungsi pada buku ini, yang menjadi domain fungsi adalah himpunan bilangan real dimana fungsi tersebut terdefinisi.
2. Sebuah fungsi f dikatakan mempunyai limit di titik c jika dan hanya jika nilai fungsi untuk x dari kiri dan kanan menuju ke bilangan yang sama.
3. Suatu fungsi f mempunyai nilai limit di titik c, apabila nilai limit kiri sama dengan nilai limit kanan dari fungsi tersebut pada titik c.
4. Tidak semua fungsi mempunyai limit di titik c. Titik c tidak harus anggota domain fungsi, tetapi c anggota himpunan bilangan real.
5. Misalkan f sebuah fungsi yang terdefinisi pada himpunan bilangan real dan c dan L adalah bilangan real, fungsi f mendekati L pada saat x mendekati c dapat kita tuliskan dengan $\lim_{x\to c} f(x) = L$.

6. Misalkan *f*(x), *g(x)* adalah fungsi yang mempunyai nilai limit pada x mendekati c, dengan k dan c adalah bilangan real serta n adalah bilangan bulat positif.
   a. $\lim\limits_{x \to c} k = k$
   b. $\lim\limits_{x \to c} x = c$
   c. $\lim\limits_{x \to c} \left[kf(x) \right] = k \left[\lim\limits_{x \to c} f(x) \right]$
   d. $\lim\limits_{x \to c} \left[f(x) \pm g(x) \right] = \left[\lim\limits_{x \to c} f(x) \right] \pm \left[\lim\limits_{x \to c} g(x) \right]$
   e. $\lim\limits_{x \to c} \left[f(x) g(x) \right] = \left[\lim\limits_{x \to c} f(x) \right] \left[\lim\limits_{x \to c} g(x) \right]$
   f. $\lim\limits_{x \to c} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)} \right] = \left[\dfrac{\lim\limits_{x \to c} f(x)}{\lim\limits_{x \to c} g(x)} \right]$ dengan $\lim\limits_{x \to c} g(x) \quad 0$
   g. $\lim\limits_{x \to c} \left[f(x) \right]^n = \lim\limits_{x \to c} \left[f(x) \right]^n$
   h. $\lim\limits_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to c} f(x)}$.

Selanjutnya, kita akan membahas tentang materi turunan. Materi prasyarat yang harus kamu kuasai adalah himpunan, fungsi, operasi hitung bilangan dan pengukuran serta limit fungsi. Hal ini sangat berguna dalam penentuan turunan suatu fungsi, nilai stasioner, nilai optimal sebuah fungsi, titik belok, dan sebagainya. Pada jenjang yang lebih tinggi, kamu harus menguasai fungsi yang kontinu dan diskontinu. Semua apa yang kamu sudah pelajari sangat berguna untuk melanjutkan bahasan berikutnya dan seluruh konsep dan aturan-aturan matematika dibangun dari situasi nyata dan diterapkan dalam pemecahan masalah kehidupan.

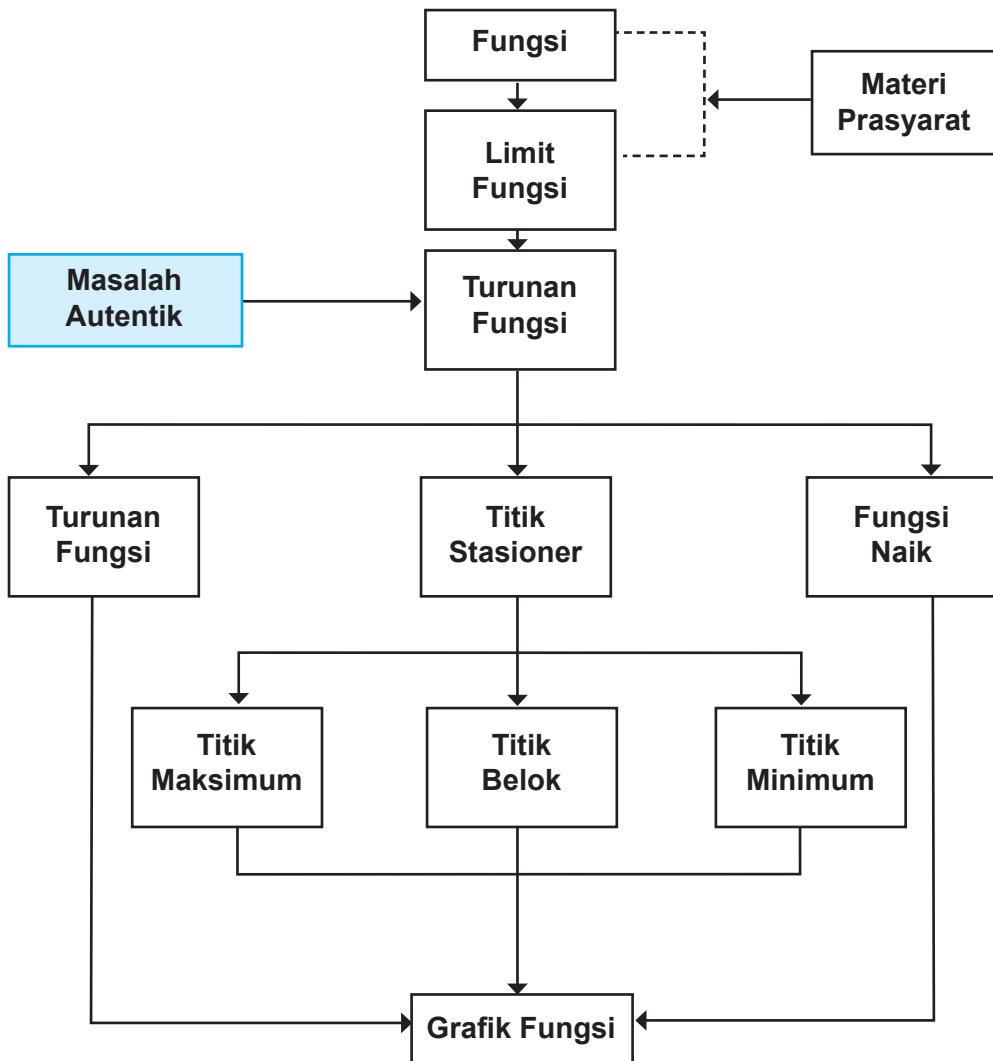
Turunan

A. Kompetensi Dasar dan Pengalaman Belajar

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
Setelah mengikuti pembelajaran turunan siswa mampu: 3.8 Menjelaskan sifat-sifat turunan fungsi aljabar dan menentukan turunan fungsi aljabar menggunakan definisi atau sifat-sifat turunan fungsi. 3.9 Menganalisis keberkaitan turunan pertama fungsi dengan nilai maksimum, nilai minimum, dan selang kemonotonan fungsi, serta kemiringan garis singgung kurva. 4.8 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan turunan fungsi aljabar. 4.9 Menggunakan turunan pertama fungsi untuk menentukan titik maksimum, titik minimum, dan selang kemonotonan fungsi, serta kemiringan garis singgung kurva, persamaan garis singgung, dan garis normal kurva berkaitan dengan masalah kontekstual.	Melalui pembelajaran materi turunan, siswa memperoleh pengalaman belajar: • Terlatih berpikir kritis, kreatif dalam menganalisis permasalahan. • Bekerjasama dalam tim dalam menemukan solusi permasalahan melalui pengamatan, diskusi, dan menghargai pendapat dalam saling memberikan argumen. • Terlatih melakukan penelitian dasar terhadap penemuan konsep. • Mengkomunikasikan karakteristik masalah autentik yang pemecahannya terkait turunan. • Merancang model matematika dari sebuah permasalahan *autentik* yang berkaitan dengan turunan. • Menyelesaikan model matematika untuk menganalisis dan mendapatkan solusi per-masalahan yang diberikan. • Menuliskan dengan kata-katanya sendiri konsep turunan berdasarkan ciri-ciri yang dituliskan sebelumnya. • Membuktikan sifat-sifat dan aturan matematika yang berkaitan dengan turunan berdasarkan konsep yang sudah dimiliki.

Istilah Penting

- Gradien
- Garis tangen/singgung
- Stasioner
- Fungsi naik/turun
- Maksimum/minimum
- Titik belok

B. Diagram Alir

C. Materi Pembelajaran

Setelah kamu memahami konsep limit fungsi pada bab sebelumnya, kamu akan mempelajari konsep turunan. Ingat, konsep limit fungsi digunakan pada bab ini.

7.1 Menemukan Konsep Turunan Fungsi

Turunan merupakan salah satu dasar atau fondasi dalam analisis dan sangat aplikatif untuk membantu memecahkan suatu permasalahan dalam kehidupan sehari-hari. Untuk itu, kamu diharapkan mampu memahami berbagai konsep dan prinsip turunan fungsi. Kemonotonan, kecekungan, pengoptimalan, titik belok, dan lain sebagainya dapat dianalisis dengan menggunakan konsep turunan. Untuk menemukan konsep turunan, kita akan mencoba mengamati berbagai permasalahan nyata dan mempelajari beberapa kasus dan contohnya. Kita memulainya dengan menemukan konsep garis tangen atau garis singgung.

7.1.1 Menemukan Konsep Garis Sekan dan Garis Tangen

Coba kamu amati dan cermati berbagai masalah nyata yang diajukan, bermanfaat sebagai sumber abstraksi kita dalam menemukan konsep dan hubungan antara garis sekan atau tali busur dan garis singgung.

Masalah 7.1

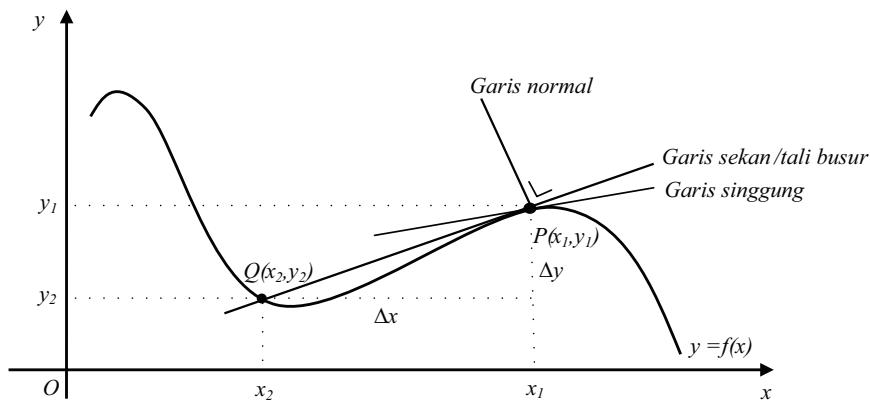
Seorang pemain ski meluncur kencang di permukaan bukit es. Dia meluncur turun, kemudian naik mengikuti lekukan permukaan es sehingga di suatu saat, dia melayang ke udara dan turun kembali ke permukaan. Perhatikan gambar di samping.

Gambar 7.1: Bermain ski
Sumber: http://www.123rf.com

Permasalahan

Secara analitik, misalkan bahwa bukit es diasumsikan sebagai kurva, pemain ski diasumsikan sebuah garis yang tegak lurus ke papan ski serta papan ski adalah sebuah garis lurus lainnya. Dapatkah kamu tunjukkan hubungan kedua garis tersebut?

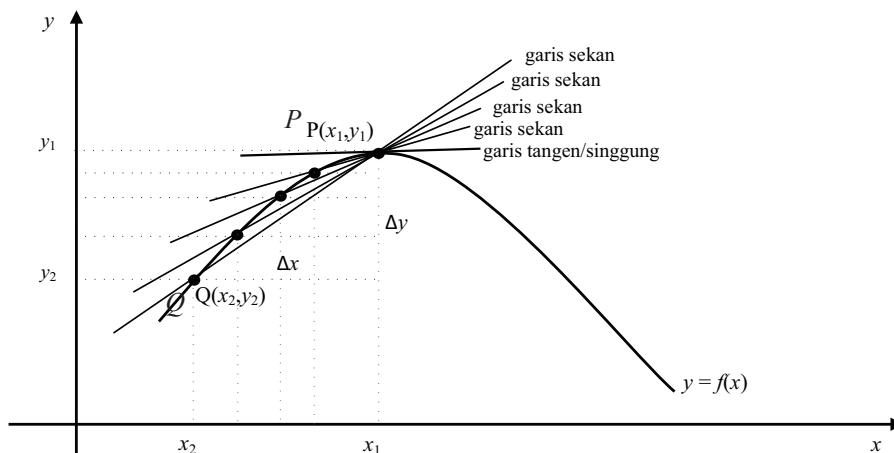
Alternatif Penyelesaian:

Coba kamu amati gambar di bawah ini. Misalkan permasalahan di atas ditampilkan dalam bentuk gambar berikut.

Gambar 7.2: Garis sekan, garis singgung dan garis normal

Posisi tegak pemain terhadap papan ski adalah sebuah garis yang disebut garis normal. Papan ski yang menyinggung permukaan bukit es di saat melayang ke udara adalah sebuah garis yang menyinggung kurva disebut garis singgung. Jadi, garis singgung tegak lurus dengan garis normal. Bagaimana hubungan garis singgung dengan kurva?

Misalkan pemain ski bergerak dari titik $Q(x_2, y_2)$ dan melayang ke udara pada titik $P(x_1, y_1)$ sehingga ia bergerak dari titik Q mendekati titik P. Semua garis yang menghubungkan titik Q dan P disebut tali busur atau garis sekan dengan gradien $m_{\sec} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. (Ingat konsep garis lurus).

Coba kamu amati proses matematis berikut. Misalkan $x_2 = x_1 + \Delta x$ dan $y_2 = y_1 + \Delta y$, jika Δx semakin kecil maka Q akan bergerak mendekati P (Jika $\Delta x \to 0$ maka $Q \to P$).

Perhatikan kembali gambar!

Gambar 7.3: Gradien garis sekan mendekati gradien garis singgung

Jika $y = f(x)$ maka gradien garis sekan PQ adalah:

$$m_{PQ} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{x_1 + \Delta x - x_1}$$

Definisi 7.1

Misalkan $f : R \to R$ adalah fungsi kontinu dan titik $P(x_1, y_1)$ dan $Q(x_1 + \Delta x, y_1 + \Delta y)$ pada kurva f. Garis sekan menghubungkan titik P dan Q dengan gradien $m_{\sec} = \dfrac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$.

Amati kembali gambar di atas. Jika titik Q mendekati P maka $\Delta x \to 0$ sehingga diperoleh garis singgung di titik P dengan gradien:

$$m_{PGS} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \text{ (Jika limitnya ada).}$$

Definisi 7.2

Misalkan f adalah fungsi kontinu bernilai real dan titik $P(x_1, y_1)$ pada kurva f. Gradien garis singgung di titik $P(x_1, y_1)$ adalah limit gradien garis sekan di titik $P(x_1, y_1)$, ditulis: $m_{GS} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} m_{\sec} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$. (Jika limitnya ada)

Contoh 7.1

Tentukan persamaan garis singgung di titik dengan absis x = 2 pada kurva $f(x) = x^2$.

Alternatif Penyelesaian:

Misalkan $x_1 = 2$ dan $y_1 = (2)^2 = 4$ sehingga titik singgung di $P(2, 4)$.

Gradien garis singgung adalah: $m = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$

$$\Leftrightarrow m_{PGS} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow m_{PGS} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2 + \Delta x)^2 - (2)^2}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow m_{PGS} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(4 + 4\Delta x + \Delta x^2) - 4}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow m_{PGS} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow m_{PGS} = \lim_{\Delta x \to 0} 4 + \Delta x$$

$$\Leftrightarrow m_{PGS} = 4.$$

Jadi, persamaan garis singgung adalah $y - 4 = 4(x - 2)$ atau $y - 4x + 4 = 0$.

Latihan 7.1

Tentukan persamaan garis singgung di titik dengan absis $x = -1$ pada kurva $f(x) = x^4$.

Alternatif Penyelesaian:

Misalkan $x_1 = -1$ dan $y_1 = . . .$ sehingga titik singgung di $P(.... , ...)$. Jadi, gradien garis singgung adalah: $m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$

$$\Leftrightarrow m_{PGS} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(... + \Delta x) - f(...)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow m_{PGS} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(... + \Delta x)^{...} - f(...)^{...}}{\Delta x}$$

Ingat penjabaran $[A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)]$

$$\Leftrightarrow m_{PGS} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[(...)^2 + f(...)^2][(...)^2 - (...)^2}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow m_{PGS} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[\quad ... \quad][\quad ... \quad]\Delta x}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow m_{PGS} = \lim_{\Delta x \to 0} [\quad ... \quad][\quad ... \quad]$$

$$\Leftrightarrow m_{PGS} = ...$$

Jadi, persamaan garis singgung adalah $y - (. . .) = (. . .)(x - (. . .))$.

7.1.2 Turunan Sebagai Limit Fungsi

Setelah kita kaji konsep garis sekan, garis normal dan garis singgung maka selanjutnya, kita akan mempelajari lebih dalam konsep garis singgung untuk mendapatkan konsep turunan.

Coba kamu perhatikan dan amati kembali Gambar 7.3. Jika $x_2 = x_1 + \Delta x$ dan $y_2 = y_1 + \Delta y$ maka titik Q akan bergerak mendekati P untuk Δx semakin kecil sedemikian gradien garis singgung di titik P disebut turunan fungsi pada titik P, ditulis: $m_{tan} = f'(x_1) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$ (Jika limitnya ada).

Jika f kontinu maka titik P dapat berada di sepanjang kurva sehingga turunan suatu fungsi pada setiap x dalam daerah asal adalah:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (\text{jika limitnya ada}).$$

Turunan fungsi dapat ditulis dengan,

Notasi Newton $\quad f'(x)$ atau y' $\quad$ (Turunan pertama fungsi).

Notasi Leibniz $\quad \dfrac{df(x)}{dx}$ atau $\dfrac{dy}{dx}$ $\quad$ (Turunan pertama fungsi).

Definisi 7.3

Misalkan fungsi $f : S \to R$, $S \subseteq R$ dengan $(c - \Delta x, c + \Delta x) \subseteq S$. Fungsi f dapat diturunkan di titik c jika dan hanya jika ada $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}$.

Definisi 7.4

Misalkan $f : S \to R$ dengan $S \subseteq R$. Fungsi f dapat diturunkan pada S jika dan hanya jika fungsi f dapat diturunkan di setiap titik c di S.

Contoh 7.2

Tentukan turunan fungsi $y = x^2$.

Alternatif Penyelesaian:

Jika $f(x) = x^2$ maka $f'(x)$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - (x)^2}{\Delta x} \quad \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2x + \Delta x)\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} 2x + \Delta x = 2x.$$

Definisi 7.5

Misalkan fungsi $f : S \to R, S \subseteq R$ dengan $(c - \Delta x, c + \Delta x) \subseteq S$

- Fungsi f memiliki turunan kanan pada titik c jika dan hanya jika $\lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}$ ada.
- Fungsi f memiliki turunan kiri pada titik c jika dan hanya jika $\lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \dfrac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}$ ada.

Berdasarkan pembahasan masalah di atas, suatu fungsi akan dapat diturunkan pada suatu titik jika memenuhi sifat berikut.

Sifat 7.1

Misalkan fungsi $f : S \to R, S \subseteq R$ dengan $x \in S$ dan $L \in R$. Fungsi f dapat diturunkan di titik x jika dan hanya jika turunan kiri sama dengan turunan kanan, ditulis,

$$f'(x) = L \Leftrightarrow \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = L.$$

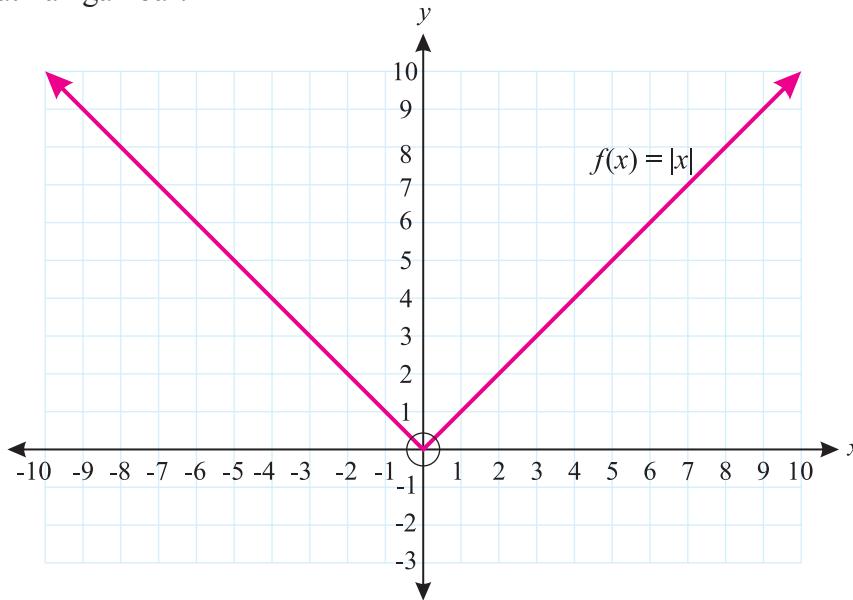
Keterangan:

1. $\lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ adalah turunan fungsi f di titik x yang didekati dari kanan pada domain S.
2. $\lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ adalah turunan fungsi f di titik x yang didekati dari kiri pada domain S.

Contoh 7.3

Sketsa grafik fungsi $f(x) = |x|$ dan coba amati dengan cermat turunan fungsi tersebut pada titik $O(0,0)$.

Alternatif Penyelesaian:

Perhatikan gambar!

Gambar 7.4: Kurva fungsi $f(x) = |x|$

Berdasarkan konsep turunan maka $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ jika limitnya ada.

i. Jika $x \geq 0$ maka $f(x) = x$ sehingga:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x) - x}{\Delta x} = 1 \text{ (limit kanan ada).}$$

ii. Jika $x<0$ maka $f(x) = -x$ sehingga:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-(x+\Delta x) - (-x)}{\Delta x} = -1 \text{ (limit kiri ada).}$$

Coba kamu amati proses tersebut, nilai limit kiri dan nilai limit kanan tidak sama sehingga turunan fungsi $f(x) = |x|$ di titik $x = 0$ tidak ada atau fungsi tidak dapat diturunkan di $x = 0$.

7.2 Turunan Fungsi Aljabar

Mari kita temukan aturan-aturan turunan suatu fungsi berdasarkan limit fungsi yang telah dijelaskan sebelumnya. Coba pelajari permasalahan berikut.

Masalah 7.2

Coba kamu amati dan bandingkan proses penyelesaian turunan dengan menggunakan limit fungsi berikut.

Contoh 7.4

a. Jika $f(x) = x^2$ maka

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} 2x + \Delta x$$

$$= 2x.$$

b. Jika $f(x) = x^4$ maka

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^4 - x^4}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^4 + 4x^3\Delta x + 6x^2(\Delta x)^2 + 4x(\Delta x)^3 + (\Delta x)^4 - x^4}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(4x^3 + 6x^2\Delta x + 4x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3\right)\Delta x}{\Delta x}$$

$$= 4x^3.$$

c. Jika $f(x) = x^{100}$ maka

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^{100} - x^{100}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{?}{\Delta x}$$

$$= ...?$$

d. Jika $f(x) = x^{\frac{3}{5}}$ maka

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^{\frac{3}{5}} - x^{\frac{3}{5}}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{?}{\Delta x}$$

$$= ...?$$

Dari keempat contoh di atas, kesimpulan apa yang kamu peroleh? Terdapat kesulitan dan membutuhkan strategi aljabar untuk melanjutkan proses pada Contoh c dan Contoh d. Untuk mengatasi masalah serupa, diperlukan aturan turunan suatu fungsi. Berikut akan dikaji aturan-aturan suatu turunan.

a. Turunan fungsi $f(x) = ax^n$, untuk n bilangan asli.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a(x+\Delta x)^n - ax^n}{\Delta x} \quad \text{(Gunakan Binomial Newton)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{ax^n + anx^{n-1}\Delta x + aC_2^n x^{n-1}\Delta x^2 + ... + a\Delta x^n - ax^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(anx^{n-1} + aC_2^n x^{n-1}\Delta x + ... + a\Delta x^{n-1})}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} anx^{n-1} + aC_2^n x^{n-2}\Delta x + ... + a\Delta x^{n-1}$$

$$= anx^{n-1}.$$

Latihan 7.2

Coba kamu buktikan sendiri jika $f(x) = au(x)$ dan $u'(x)$ ada, maka $f'(x) = au'(x)$.

b. Turunan fungsi $f(x) = u(x) + v(x)$ dengan $u'(x)$ dan $v'(x)$ ada.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x+\Delta x)+v(x+\Delta x)]-[u(x)+v(x)]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x+\Delta x)-u(x)]+[v(x+\Delta x)-v(x)]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x+\Delta x)-u(x)]}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[v(x+\Delta x)-v(x)]}{\Delta x}$$

$$= u'(x) + v'(x).$$

 Latihan 7.3

Buktikan bahwa turunan fungsi $f(x) = u(x) - v(x)$ adalah $f'(x) = u'(x) - v'(x)$.

 Contoh 7.5

Tentukan turunan fungsi-fungsi berikut!

a. $f(x) = 5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1$.

Alternatif Penyelesaian:

$f'(x) = 5 \cdot 4x^{4-1} - 4 \cdot 3x^{3-1} + 3 \cdot 2x^{2-1} - 2 \cdot 1x^{1-1} + 1 \cdot 0x^{0-1}$

$f'(x) = 20x^3 - 12x^2 + 6x - 2$

b. $f(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{4}} - \frac{2}{5}x^{\frac{1}{3}}$

Alternatif Penyelesaian:

$$f'(x) = \frac{1}{3}.\frac{1}{4}x^{\frac{1}{4}-1} - \frac{2}{5}.\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}$$

$$f'(x) = \frac{1}{12}x^{-\frac{3}{4}} - \frac{2}{15}x^{-\frac{2}{3}}.$$

c. Turunan fungsi $f(x) = [u(x)]^n$ dengan $u'(x)$ ada, n bilangan asli.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x+\Delta x)]^n - [u(x)]^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x+\Delta x) - u(x) + u(x)]^n - [u(x)]^n}{}$$

Misal $P = [u(x + \Delta x) - u(x)]$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[P + u(x)]^n - [u(x)]^n}{\Delta x}$$ (Gunakan Binomial Newton)

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P^n + C_1^n P^{n-1}[u(x)] + C_2^n P^{n-2}[u(x)]^2 + \ldots + C_{n-1}^n P[u(x)]^{n-1} + [u(x)]^n - [u(x)]^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P^n + nP^{n-1}[u(x)] + C_2^n P^{n-2}[u(x)]^2 + \ldots + C_{n-2}^n P^2[u(x)]^{n-2} + C_{n-1}^n P[u(x)]^{n-1}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(P^{n-1} + nP^{n-2}[u(x)]^2 + \ldots + C_{n-2}^n P[u(x)]^{n-2} + C_{n-1}^n [u(x)]^{n-1})}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P}{\Delta x} \lim_{\Delta x \to 0} P^{n-1} + nP^{n-2}[u(x)]^2 + \ldots + C_{n-2}^n P[u(x)]^{n-2} + C_{n-1}^n [u(x)]^{n-1}$$

Karena $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{P}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} = u'(x)$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} P = \lim\limits_{\Delta x \to 0} u(x + \Delta x) - u(x) = 0$

$= u'(x)[0 + n[u(x)]]^{n-1}$

$= nu'(x)[u(x)]^{n-1}$.

Aturan Turunan 7.1:

Misalkan f, u, v adalah fungsi bernilai real dan dapat diturunkan di interval I, a bilangan real dapat diturunkan maka:

1. $f(x) = a \to f'(x) = 0$
2. $f(x) = ax \to f'(x) = a$
3. $f(x) = ax^n \to f'(x) = n \cdot ax^{n-1}$
4. $f(x) = au(x) \to f'(x) = au'(x)$
5. $f(x) = u(x) \pm v(x) \to f'(x) = u'(x) \pm v'(x)$
6. $f(x) = u(x)v(x) \to f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
7. $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)} \to f'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$.

Dengan menggunakan aturan turunan tersebut, gradien garis singgung suatu kurva akan lebih mudah ditentukan. Perhatikan contoh berikut!

Contoh 7.6

Tentukan turunan $f(x) = (2x^2 - 3x)^4$.

Alternatif Penyelesaian:

Misalkan $u(x) = 2x^2 - 3x$ sehingga $u'(x) = 4x - 3$

Dengan demikian $f(x) = (2x^2 - 3x)^4$ menjadi $f(x) = (u(x))^4$ sehingga $f'(x) = 4(u(x))^3u'(x)$.

Jadi, $f'(x) = 4(2x^2 - 3x)^3(4x - 3)$ atau $f'(x) = 4(4x - 3)(2x^2 - 3x)^3$.

Latihan 7.4

Tentukan persamaan garis singgung kurva $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x-1}}$ di titik $P(2, 4)$.

Alternatif Penyelesaian:

Langkah 1. Menemukan titik singgung

Misalkan $x_1 = 2$ dan $y_1 = 4$ (lihat $f(2) = \dfrac{2^2}{\sqrt{2-1}} = 4$ sehingga titik $P(2, 4)$ berada pada kurva)

Langkah 2. Mencari gradien garis singgung:

Pertama, kita tentukan turunan pertama dari fungsi $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{x-1}}$.
Misalkan $u(x) = x^2$ sehingga $u'(x) = \ldots$ dan

$$v(x)=\sqrt{x-1}=(x-1)^{\frac{1}{2}} \text{ sehingga } v'(x)=\ldots.$$

Dengan demikian, $f'(x)=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$ atau $f'(x)=\dfrac{\ldots}{\ldots}$.

Langkah 3: Menemukan persamaan garis singgung
Gradien garis singgung kurva di titik $P(2, 4)$ adalah $f'(x) = \ldots$ sehingga persamaan garis singgung tersebut adalah $y - (\ldots) = (\ldots)(x - (\ldots))$.

Uji Kompetensi 7.1

1. Dengan menggunakan konsep limit fungsi, tentukan gradien garis singgung fungsi berikut.
   a. $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$
   b. $f(x) = x^3 - x$
   c. $f(x) = x^3 - x^{-3}$
   d. $f(x) = 2(1 - x)^2$
   e. $f(x)=\dfrac{2}{x}$.

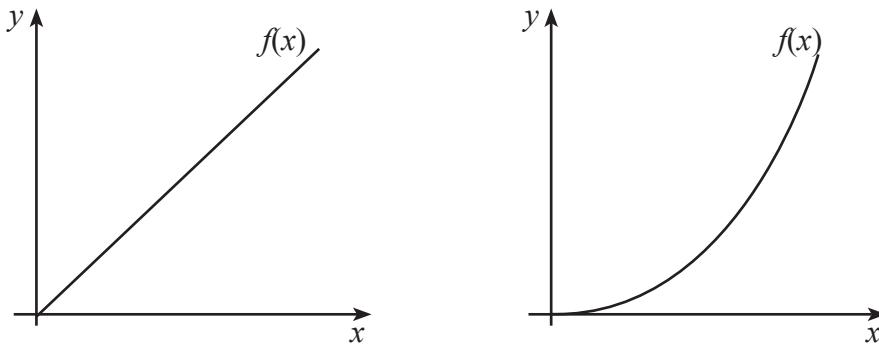
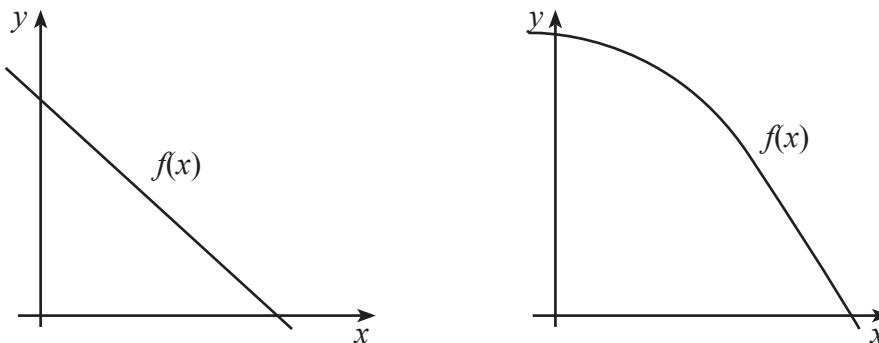
2. Tentukan persamaan garis singgung dan persamaan garis normal di titik dengan absis $x = 1$ pada setiap fungsi berikut. *Petunjuk: carilah gradien persamaan garis singgung dengan menggunakan limit fungsi.*
   a. $f(x) = 2x$
   b. $f(x) = 2x^2$
   c. $f(x) = (2x - 1)^3$
   d. $f(x)=\dfrac{2}{x+1}$
   e. $f(x)=\dfrac{2}{x^2}$.

3. Garis k menyinggung fungsi $f(x)$ di titik $P(a, b)$. Tentukan titik singgung P tersebut pada masing – masing garis singgung dan fungsi berikut:
   a. Garis k: $2x - 4x + 3 = 0$ menyinggung fungsi $f(x) = 2x^2$
   b. Garis k: $-x + 2y - 3 = 0$ menyinggung fungsi $f(x) = -4x^2 + 2x$
   c. Garis k: $x - y = 0$ menyinggung fungsi $f(x) = \frac{1}{4}x^4$
   d. Garis k: $2x - y - 5 = 0$ menyinggung fungsi $f(x) = x^3 - 10x$
   e. Garis k: $-2x + y - 3 = 0$ menyinggung fungsi $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 1$.
4. Dengan menggunakan konsep turunan, tentukan turunan dari fungsi-fungsi berikut.
   a. $f(x) = x^{-3}$
   b. $f(x) = (2x + 1)^{-5}$
   c. $f(x) = x^3(2x + 1)^5$
   d. $f(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{4}}$
   e. $f(x) = (\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x)^4$
   f. $f(x) = \sqrt{2x - 3}$
   g. $f(x) = \sqrt{2x^3 - 1}$
   h. $f(x) = \frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$
   i. $f(x) = 2x^2(-3x + 1)^3$
   j. $f(x) = \frac{4x + 1}{2x - 1}$.
5. Tentukan persamaan garis singgung kurva $y = f(x)$ di titik $P(-1, 1)$ pada masing-masing fungsi berikut. Petunjuk: carilah gradien persamaan garis singgung dengan menggunakan konsep turunan.
   a. $f(x) = (x + 2)^{-9}$
   b. $f(x) = \sqrt[3]{2x^2 - 1}$
   c. $f(x) = -x^3(x + 2)^{-2}$
   d. $f(x) = \sqrt{2 - x^2}$
   e. $f(x) = \frac{x + 2}{2x^2 - 1}$.

7.3 Aplikasi Turunan

Konsep turunan digunakan untuk menentukan interval fungsi naik/turun, keoptimalan fungsi, dan titik belok suatu kurva.

7.3.1 Konsep Kemonotonan Fungsi

Bangunan yang tinggi dengan lantai bertingkat selalu difasilitasi dengan eskalator atau *lift*. Gerakan *lift* dan eskalator saat naik dapat diilustrasikan sebagai fungsi naik. Demikian juga gerakan *lift* dan eskalator saat turun dapat diilustrasikan sebagai fungsi turun. Amatilah keempat grafik fungsi di bawah ini dan coba tuliskan ciri-ciri fungsi naik dan fungsi turun sebagai ide dasar untuk mendefinisikan fungsi naik dan fungsi turun.

Gambar7.5a: Kurva fungsi naik

Gambar 7.5b: Kurva fungsi turun

Dari contoh grafik fungsi naik dan fungsi turun di atas, mari kita definisikan fungsi naik dan turun sebagai berikut.

Definisi 7.6:

Misalkan fungsi $f : S \to R, S \subseteq R$
- Fungsi f dikatakan naik jika $\forall x_1, x_2 \in S, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- Fungsi f dikatakan turun jika $\forall x_1, x_2 \in S, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Contoh 7.7

Tunjukkan grafik fungsi $f(x) = x^3$, $x \in R$ dan $x > 0$ adalah fungsi naik.

Alternatif Penyelesaian:

$f(x) = x^3$, $x \in R$ dan $x > 0$
Ambil sebarang $x_1, x_2 \in R$ dengan $0 < x_1 < x_2$
$x = x_1 \Rightarrow f(x_1) = x_1^3$
$x = x_2 \Rightarrow f(x_2) = x_2^3$
Karena $0 < x_1 < x_2$ maka $x_1^3 < x_2^3$
Karena $x_1^3 < x_2^3$ maka $f(x_1) < f(x_2)$
Dengan demikian $\forall x \in S, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Dapat disimpulkan f adalah fungsi naik.

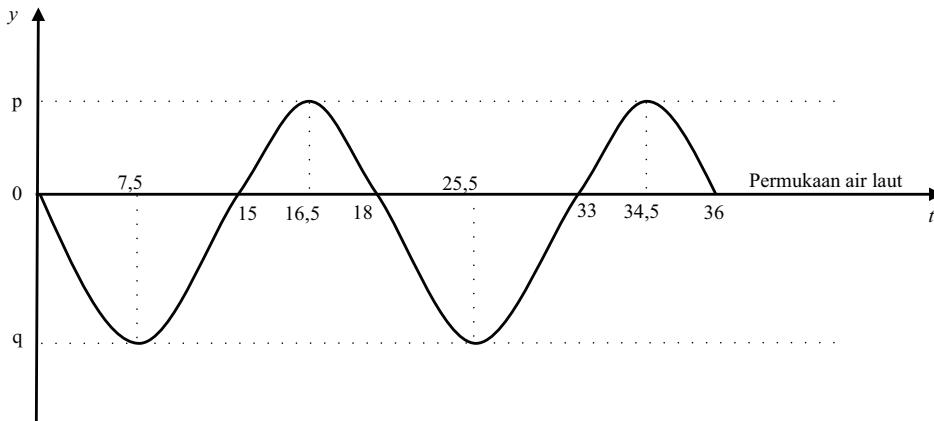
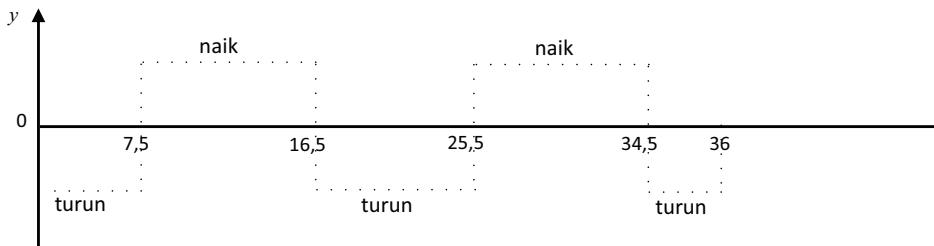
Latihan 7.5

Bagaimana jika $f(x) = x^3$, $x \in R$ dan $x < 0$, apakah grafik fungsi f adalah fungsi naik? Selidiki!

Masalah 7.3

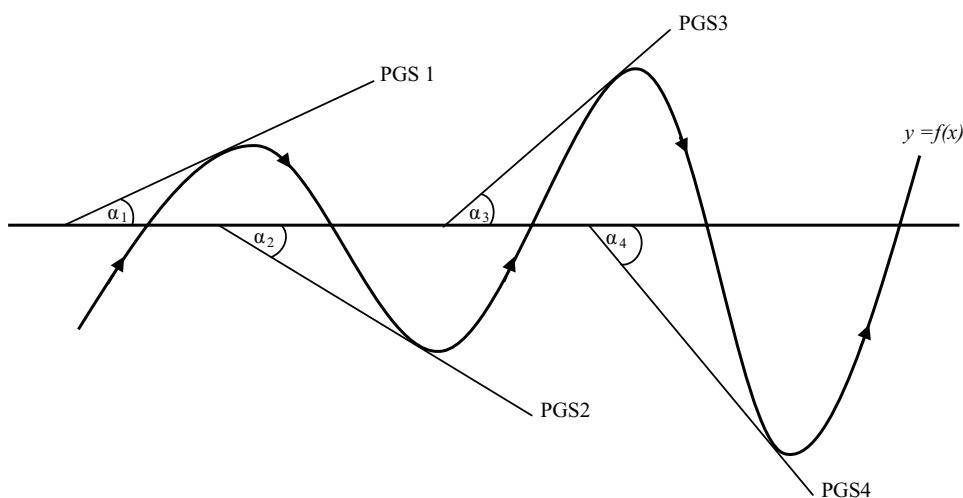
Lumba-lumba berenang di lautan bebas. Terkadang, lumba-lumba berenang mengikuti kapal yang melaju di sekitarnya. Seorang nelayan melihat seekor lumba-lumba sedang berenang mengikuti kecepatan perahu mereka. Gerakan lumba-lumba berperiode timbul dan tenggelam di permukaan air laut. Misalkan, lumba-lumba kembali ke permukaan setiap 15 detik dan tampak di permukaan selama 3 detik.

Coba kamu sketsa pergerakan lumba-lumba tersebut dalam 2 periode? Tentukan interval waktu agar lumba-lumba tersebut bergerak naik atau turun!

Alternatif Penyelesaian:

Gambar 7.6: Sketsa pergerakan lumba-lumba dalam pengamatan tertentu

Gambar 7.7: Sketsa pergerakan naik/turun lumba-lumba dalam pengamatan tertentu

Berdasarkan sketsa di atas, lumba-lumba bergerak turun di interva $0 < t < 7,5$ atau $16,5 < t < 25,5$ atau $34,5 < t < 36$ dan bergerak naik di interval $7,5 < t < 16,5$ atau $25,5 < t < 34,5$.

Latihan 7.6

Coba kamu amati beberapa garis singgung yang menyinggung kurva di saat fungsi naik atau turun di bawah ini. Garis singgung 1 dan 3 menyinggung kurva pada saat fungsi naik dan garis singgung 2 dan 4 menyinggung kurva pada saat fungsi turun.

Gambar 7.8: Garis singgung di interval fungsi naik/turun

Amati dan dapatkan konsep fungsi naik dan fungsi turun dengan panduan berikut.

Langkah 1

Amati sudut yang dibentuk keempat garis singgung, kemudian tentukan di kuadran berapa keempat sudut terletak.

Langkah 2

Ingat, gradien garis adalah tangen sudut yang dibentuk oleh garis itu sendiri dengan sumbu x positif.

Tentukan nilai tangen setiap sudut. (Ingat konsep trigonometri)

Lengkapi tabel berikut.

Tabel 7.1: Hubungan gradien garis singgung dengan fungsi naik dan fungsi turun

PGS	Sudut	Kuadran	Nilai tangen	$m = f'(x)$	Menyinggung di
1	2	3	4	5	6
PGS 1	α_1	I	$m = \tan(\alpha_1) > 0$	$f'(x) > 0$	Fungsi Naik
PGS 2	α_2	…	…	…	Fungsi Turun
PGS 3	α_3	…	…	…	Fungsi Naik
PGS 4	α_4	…	…	…	Fungsi Turun

Coba kamu amati Gambar 7.8 dan Tabel 7.1! Apakah kamu melihat konsep fungsi naik/turun. Berikan kesimpulanmu!

Sifat 7.2

Misalkan f adalah fungsi bernilai real dan dapat diturunkan pada setiap $x \in I$ maka

1. Jika $f'(x) > 0$ maka fungsi selalu naik pada interval I.
2. Jika $f'(x) < 0$ maka fungsi selalu turun pada interval I.
3. Jika $f'(x) \geq 0$ maka fungsi tidak pernah turun pada interval I.
4. Jika $f'(x) \leq 0$ maka fungsi tidak pernah naik pada interval I.

Contoh 7.8

Tentukan interval fungsi $f(x) = x^2$ agar fungsi naik.

Alternatif Penyelesaian:

Berdasarkan konsep, syarat fungsi naik adalah $f'(x) > 0$

$f'(x) = 2x > 0$ sehingga $x > 0$

Jadi, fungsi akan naik pada interval $\{x|x > 0, x \in R\}$

Contoh 7.9

Tentukan interval fungsi naik dan turun dari fungsi $f(x) = x^4 - 2x^2$.

Alternatif Penyelesaian:

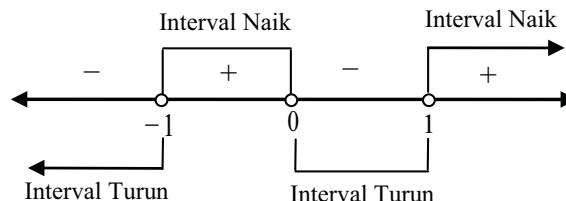
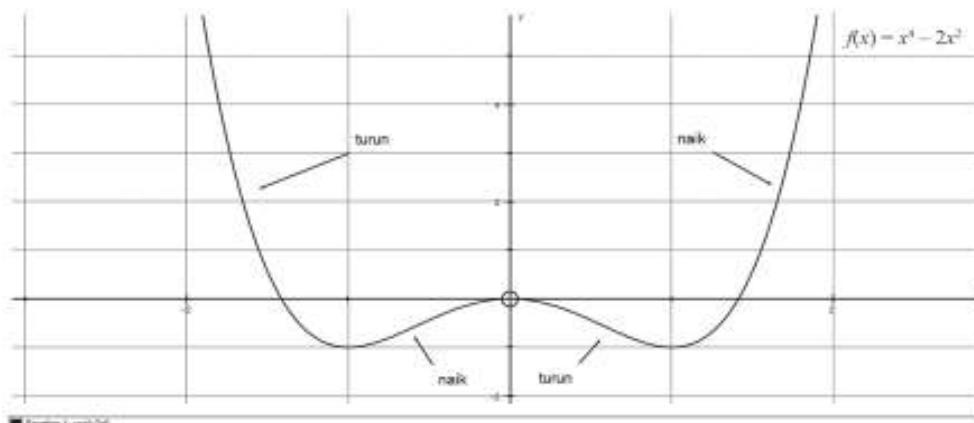
Pembuat nol dari $f'(x)$:

$f'(x) = 4x^3 - 4x$

$\Leftrightarrow \; 4x^3 - 4x = 0$

$\Leftrightarrow \; 4x(x - 1)(x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow \; x = 0$ atau $x = 1$ atau $x = -1$

Dengan menggunakan interval.

Jadi, kurva fungsi tersebut akan naik pada interval $-1 < x < 0$, atau $x > 1$ tetapi turun pada interval $x < -1$ atau $0 < x < 1$. Perhatikan sketsa kurva $f(x) = x^4 - 2x^2$ berikut.

Gambar 7.9: Fungsi naik/turun kurva $f(x) = x^4 - 2x^2$

Contoh 7.10

Tentukan interval fungsi naik $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$.

Alternatif Penyelesaian:

Masih ingatkah kamu syarat numerus $\sqrt{P(x)}$ adalah $P(x) \geq 0$. Jadi, syarat numerus $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$ adalah $x^2 - x \geq 0$. Ingatlah kembali cara-cara menyelesaikan pertidaksamaan.

$x^2 - x \geq 0 \quad \Leftrightarrow x(x - 1) \geq 0$

$\quad\quad\quad\quad\;\; \Leftrightarrow x = 0$ atau $x = 1$

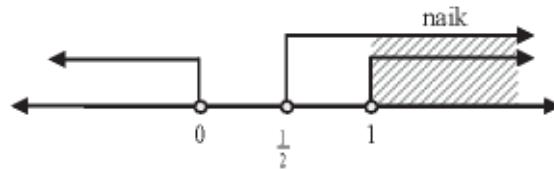
Dengan menggunakan interval.

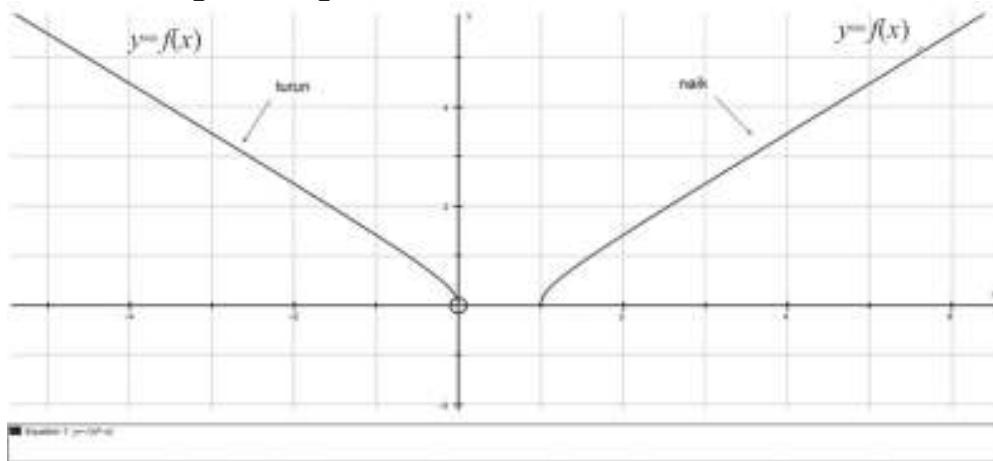
Jadi, syarat numerus bentuk akar di atas adalah $x \leq 0$ atau $x \geq 1$

Berdasarkan konsep, sebuah fungsi akan naik jika $f'(x) > 0$ sehingga:

$$f'(x) = \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x}} > 0 \Leftrightarrow 2x - 1 > 0 \text{ karena } \sqrt{x^2 - x} > 0 \text{ dan } x \neq 0, x \neq 1$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$$

Dengan menggunakan interval.

Jadi, kurva fungsi tersebut akan naik pada interval $x > 1$.

Perhatikanlah grafik fungsi $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$ berikut!

Gambar 7.10: Fungsi naik dan fungsi turun fungsi $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$

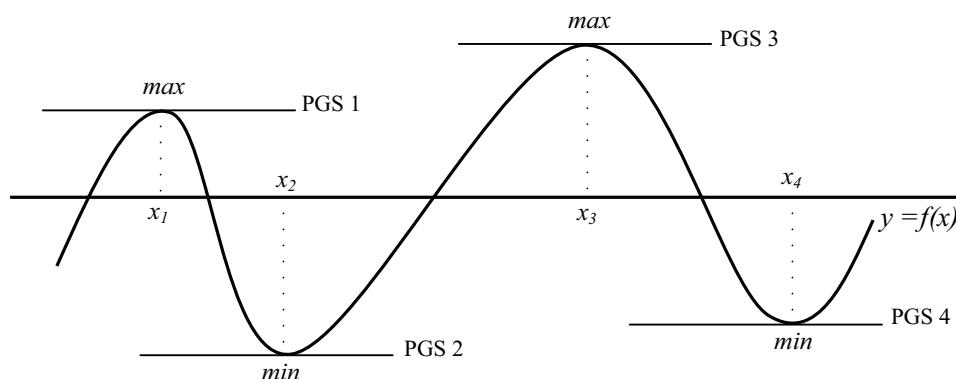
7.3.2 Nilai Maksimum atau Minimum Fungsi

Setelah menemukan konsep fungsi naik dan turun, kita lanjutkan pembelajaran ke permasalahan maksimum dan minimum serta titik belok suatu fungsi. Aplikasi yang akan dibahas adalah permasalahan titik optimal fungsi dalam interval terbuka dan tertutup, titik belok, dan permasalahan kecepatan maupun percepatan.

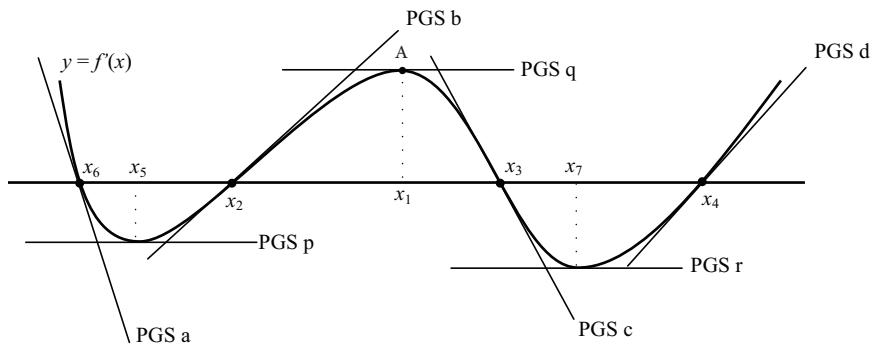
Masalah 7.4

Seorang anak menarik sebuah tali dan kemudian membuat gelombang dari tali dengan menghentakkan tali tersebut ke atas dan ke bawah. Dia melihat bahwa gelombang tali memiliki puncak maksimum maupun minimum. Dapatkah kamu menemukan konsep nilai maksimum ataupun minimum dari sebuah fungsi?

Alternatif Penyelesaian:

Gradien garis singgung adalah tangen sudut yang dibentuk oleh garis itu sendiri dengan sumbu x positif atau turunan pertama dari titik singgungnya.

Gambar 7.11: Sketsa gelombang tali

Coba kamu amati gambar di atas. Garis singgung (PGS 1, PGS 2, PGS 3 dan PGS 4) adalah garis horizontal $y = c$, dengan c konstan. Garis singgung ini mempunyai gradien nol ($m = 0$). Keempat garis singgung menyinggung kurva di titik puncak dengan absis $x = x_1$, $x = x_2$, $x = x_3$, dan $x = x_4$ sehingga $f'(x_1) = 0$, $f'(x_2) = 0$, $f'(x_3) = 0$, dan $f'(x_4) = 0$. Dari pengamatan, dapat disimpulkan bahwa suatu fungsi akan mencapai optimal (maksimum/minimum) jika $m = f'(x) = 0$. Titik yang memenuhi $f'(x) = 0$ disebut titik stasioner. Bagaimana hubungan antara titik stasioner dengan turunan kedua fungsi?

Perhatikan gambar!

Gambar 7.12: Hubungan garis singgung kurva $m = f'(x)$ dengan titik stasioner

Jika $y_1 = f'(x_1)$ maka titik $A(x_1, y_1)$ adalah titik maksimum pada Gambar 7.12 sehingga titik dengan absis $x = x_1$ adalah titik stasioner karena $f'(x_1) = 0$. Garis singgung kurva dengan gradien M pada fungsi $m = f'(x_1)$ menyinggung di titik $x = x_1$ membentuk sudut sehingga nilai tangen sudut bernilai negatif atau $M = m' = f''(x_1) < 0$. Dengan kata lain, titik $A(x_1, y_1)$ adalah titik maksimum jika $f'(x_1) = 0$ dan $f''(x_1) < 0$.

Kesimpulan: Jika M adalah gradien garis singgung kurva $f'(x_1)$ maka $M = f''(x)$ sehingga hubungan turunan kedua dengan titik stasioner disajikan pada tabel berikut.

Tabel 7.2: Hubungan turunan kedua fungsi dengan titik optimal (stasioner)

PGS	Gradien $M = f''(x)$	Jenis Titik	Pergerakan kurva
a	$M_a = f''(x_1) < 0$	Max	Naik-Max-Turun
b	$M_b = f''(x_2) > 0$	Min	Turun-Min-Naik
c	$M_c = f''(x_3) < 0$	Max	Naik-Max-Turun
d	$M_d = f''(x_4) > 0$	Min	Turun-Min-Naik
p	$M_p = f''(x_5) = 0$	T. Belok	Turun-Belok-Turun
q	$M_q = f''(x_6) = 0$	T. Belok	Naik-Belok-Naik
r	$M_r = f''(x_7) = 0$	T. Belok	Turun-Belok-Turun

Sifat 7.3

Misalkan f adalah fungsi bernilai real yang kontinu dan memiliki turunan pertama dan kedua pada $x_1 \in I$ sehingga:

1. Jika $f'(x_1) = 0$ maka titik $(x_1, f(x_1))$ disebut stasioner/kritis
2. Jika $f'(x_1) = 0$ dan $f''(x_1) > 0$ maka titik $(x_1, f(x_1))$ disebut titik minimum fungsi
3. Jika $f'(x_1) = 0$ dan $f''(x_1) < 0$ maka titik $(x_1, f(x_1))$ disebut titik maksimum fungsi
4. Jika $f''(x_1) = 0$ maka titik $(x_1, f(x_1))$ disebut titik belok.

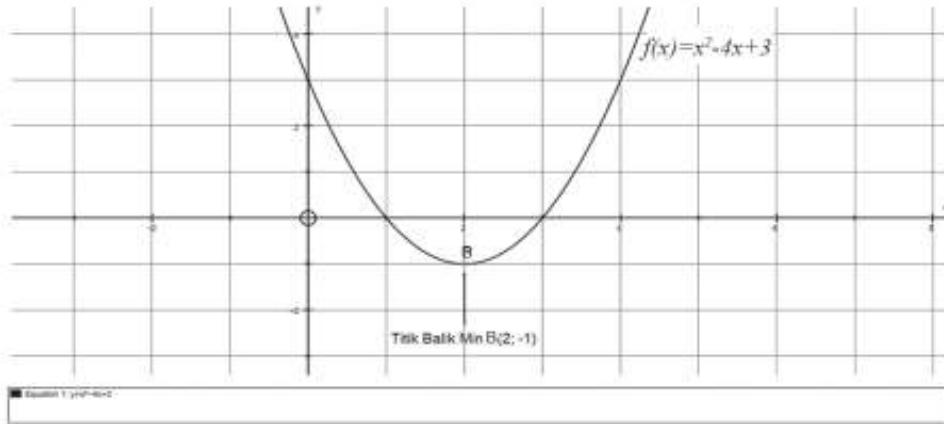
Contoh 7.11

Tentukan titik balik fungsi kuadrat $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

Alternatif Penyelesaian 1 (Berdasarkan Konsep Fungsi Kuadrat):

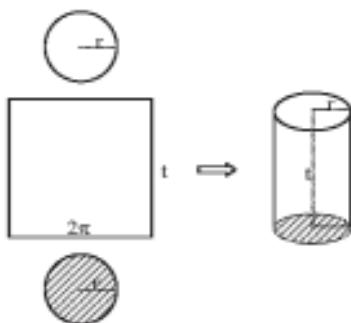
Dengan mengingat konsep fungsi kuadrat. Suatu fungsi $f(x) = ax^2 + bx + c$ mempunyai titik balik $B(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a})$ dimana fungsi mencapai maksimum untuk $a < 0$ dan mencapai minimum untuk $a > 0$ sehingga fungsi $f(x) = x^2 - 4x + 3$ mempunyai titik balik minimum pada $B(-\frac{-4}{2(1)}, -\frac{(-4)^2 - 4(1)(3)}{4(1)}) = B(2,-1)$.

Alternatif Penyelesaian 2 (Berdasarkan Konsep Turunan):

Dengan menggunakan konsep turunan maka fungsi $f(x) = x^2 - 4x + 3$ mempunyai stasioner: $f'(x) = 2x - 4 = 0$ atau $x = 2$ sehingga titik stasioner adalah $B(2, -1)$. Mari kita periksa keoptimalan fungsi dengan melihat nilai turunan keduanya pada titik tersebut, yaitu $f''(2) = 2 > 0$ atau disebut titik minimum. Jadi, titik balik fungsi kuadrat $f(x) = x^2 - 4x + 3$ adalah minimum di $B(2, -1)$.

Gambar 7.13: Titik balik fungsi kuadrat $f(x) = x^2 - 4x + 3$

Contoh 7.12

Seorang anak berencana membuat sebuah tabung dengan alas berbentuk lingkaran dengan bahan yang berbeda. Tabung yang akan dibuat harus mempunyai volume 43.120 cm^3. Biaya pembuatan alas adalah Rp150,00 per cm^2, biaya pembuatan selimut tabung adalah Rp40,00 per cm^2 sementara biaya pembuatan atap adalah Rp50,00 per cm^2. Berapakah biaya minimal yang harus disediakan anak tersebut?

Alternatif Penyelesaian:

Gambar 7.14: Tabung

Mari kita sketsa tabung yang akan dibuat. Misalkan r adalah radius alas dan atap tabung, t adalah tinggi tabung, dan $\pi = \frac{22}{7}$.

$$v = \frac{22}{7} r^2 t = 43.120 \Leftrightarrow t = \frac{7}{22} \times \frac{43.120}{r^2}.$$

Biaya = (Luas alas × biaya alas) + (Luas selimut × biaya selimut) + (Luas atap × biaya atap)

$\Leftrightarrow$ Biaya = $\frac{22}{7} \times r^2 \times 150 + 2 \times \frac{22}{7} \times r \times t \times 40 + \frac{22}{7} \times r^2 \times 50$

$\Leftrightarrow$ Biaya = $\frac{22}{7} \times r^2 \times 150 + 2 \times \frac{22}{7} \times r \times \frac{7}{22} \times \frac{43.120}{r^2} \times 40 + \frac{22}{7} \times r^2 \times 50$

$\Leftrightarrow$ Biaya = $\frac{22}{7} \times r^2 \times 200 + \frac{86.240}{r} \times 40.$

Atau dapat dituliskan:

$B(r) = \frac{4.400}{7} r^2 + \frac{3.449.600}{r}$ (fungsi atas radius r (dalam Rupiah)).

$B'(r) = \frac{8.800}{7} r - \frac{3.449.600}{r^2} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{88}{7} r = \frac{34.496}{r^2}$

$\Leftrightarrow r^3 = 2.744 = 14^3$

$\Leftrightarrow r = 14$

Karena $B''(r) = \frac{8.800}{7} + \frac{2(3.449.600)}{r^3}$ dan $B''(14) > 0$ maka titik optimum (minimum)

Biaya minimum $= \frac{22}{7} \times 14^2 \times 200 + \frac{86.240}{14} \times 40$

$= 616 \times 200 + 6.160 \times 40$

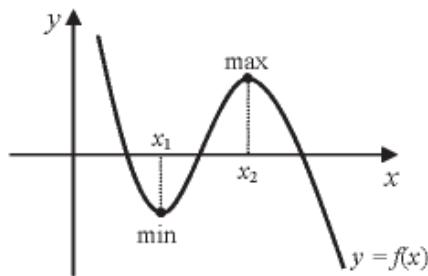
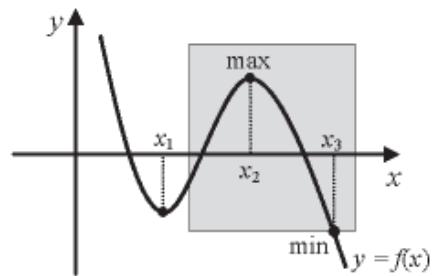
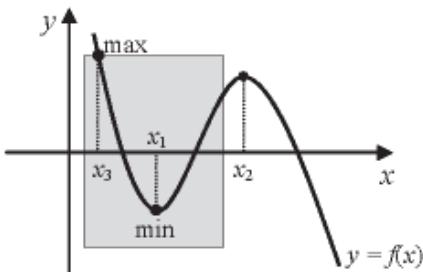
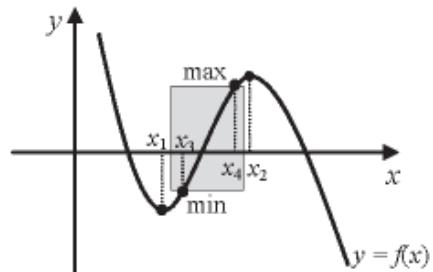
$= 123.200 + 246.400$

$= 369.600$

Jadi, biaya minimum yang harus disediakan adalah Rp 369.600,00.

7.3.3 Nilai Maksimum dan Minimum Fungsi pada Suatu Interval

Masalah 7.5

Coba kamu amati dan bandingkan posisi titik maksimum dan minimum dari keempat gambar berikut.

Gambar 7.15: Titik maksimum dan minimum suatu fungsi

Kesimpulan apa yang kamu peroleh?

Alternatif Penyelesaian

Daerah asal fungsi pada Gambar A tidak dibatasi, dan konsep ini telah kita bahas pada Masalah 7.4. Daerah asal (domain) fungsi pada (B, C dan D) telah dibatasi sehingga keoptimalan fungsi harus dianalisis apakah berada pada daerah tersebut. Dengan demikian, gambar A adalah posisi titik maksimum/minimum lokal sebuah fungsi dan ketiga gambar lainnya adalah posisi titik maksimum atau minimum global/lokal sebuah fungsi pada daerah tertutup. Nilai maksimum dan minimum fungsi tidak hanya bergantung pada titik stasioner fungsi tersebut tetapi bergantung juga pada daerah asal fungsi.

 Contoh 7.13

Sebuah partikel diamati pada interval waktu (dalam menit) tertentu berbentuk kurva $f(t) = t^3 - 9t^2 + 24t - 16$ pada $0 \leq t \leq 6$. Tentukan nilai optimal pergerakan partikel tersebut.

Alternatif Penyelesaian:

Daerah asal fungsi adalah $\{t|0 \leq t \leq 6\}$

Titik stasioner $f'(t) = 0$

$f(t) = t^3 - 9t^2 + 24t - 16$ sehingga $f'(t) = 3(t^2 - 6t + 8) = 0$ dan $f''(t) = 6t - 18$

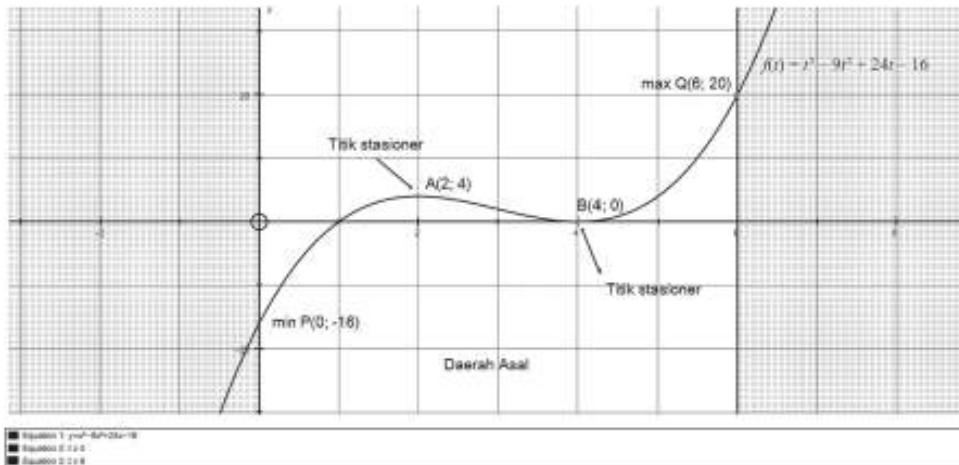
$f'(t) = 3(t - 2)(t - 4) = 0$

$t = 2 \rightarrow f(2) = 4$ dan $t = 4 \rightarrow f(4) = 0$

Karena daerah asal $\{t|0 \leq t \leq 6\}$ dan absis $t = 2$, $t = 4$ ada dalam daerah asal sehingga:

$t = 0 \rightarrow f(0) = -16$ dan $t = 6 \rightarrow f(6) = 20$.

Nilai minimum keempat titik adalah -16 sehingga titik minimum kurva pada daerah asal adalah $A(0, -16)$ dan nilai maksimum keempat titik adalah 20 sehingga titik maksimum kurva pada daerah asal adalah $B(6, 20)$.

Perhatikan gambar.

Gambar 7.16: Titik optimal kurva $f(t) = t^3 - 9t^2 + 24t - 16$ untuk $0 \leq t \leq 6$.

7.3.4 Konsep Turunan Dalam Permasalahan Kecepatan dan Percepatan

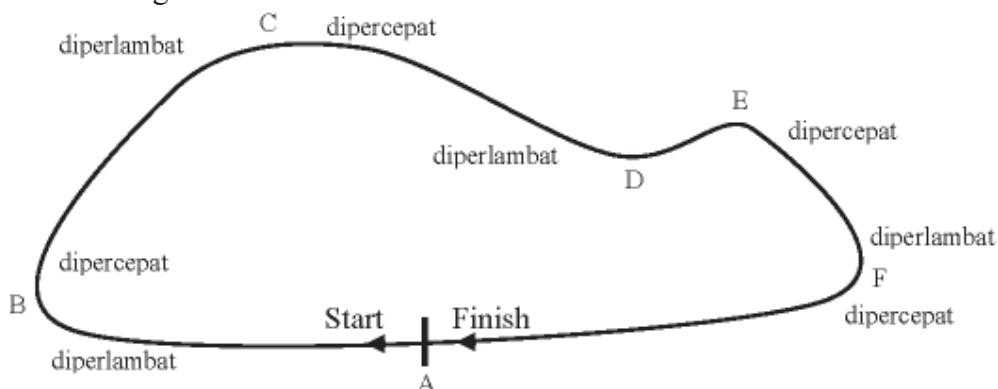
Secara arti fisis, konsep turunan yang berkaitan dengan fungsi naik atau turun, nilai optimal maksimum atau minimum serta titik belok berhubungan dengan kecepatan dan percepatan suatu fungsi. Amati dan pelajarilah permasalahan berikut!

Masalah 7.6

Seorang pembalap melakukan latihan di sebuah arena balap. Dia melaju kencang meninggalkan garis start dengan kecepatan yang diatur dengan baik. Di setiap belokan lintasan, dia menurunkan kecepatannya tetapi berharap dengan secepat mungkin kembali menaikkan kecepatan setelah meninggalkan setiap titik belokan. Demikian dia berlatih dan mendekati titik *finish*. Apakah kamu dapat menemukan hubungan jarak lintasan dan kecepatan? Dapatkah kamu jelaskan ilustrasi di atas berdasarkan konsep turunan?

Alternatif Penyelesaian:

Misalkan lintasan arena balap tersebut adalah lintasan siklis, yaitu garis awal (start) dan garis akhir (finish) adalah sama. Garis awal berarti garis tersebut ditinggalkan atau bergerak dijauhi sementara garis akhir berarti garis yang didekati.

Perhatikan gambar berikut:

Gambar 7.17: Lintasan balap

Jarak lintasan merupakan fungsi waktu atau $s = f(t)$. Dengan demikian, daerah asal fungsi adalah waktu $t \geq 0$ karena dihitung sejak diam. Setiap titik pada lintasan akan didekati dan dijauhi sehingga ada peranan kecepatan $v(t)$. Untuk titik yang dijauhi berarti kecepatan positif (ditambah), dan titik yang akan didekati berarti kecepatan negatif (dikurang).

Tabel 7.3: Kecepatan suatu fungsi dan posisinya

Posisi	Nilai
Diam	$v(t) = 0$
Bergerak menjauhi titik tetap (Start)	$v(t) > 0$
Bergerak mendekati titik tetap (Finish)	$v(t) < 0$

Jadi, bergerak semakin menjauhi ataupun semakin mendekati berarti terjadi laju perubahan dari lintasan, yaitu:

$$v(t) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = f'(t) \text{ atau } v(t) = s'(t).$$

Pergerakan pembalap pada lintasan di titik belok diperlambat atau dipercepat, sehingga posisi percepatan adalah sebagai berikut.

Tabel 7.4: Percepatan suatu fungsi dan posisinya

Posisi	Nilai
Konstan	$a(t) = 0$
Bergerak diperlambat	$a(t) < 0$
Bergerak dipercepat	$a(t) > 0$

Jadi, bergerak dipercepat atau diperlambat berhubungan dengan kecepatan. Percepatan $a(t)$ adalah laju perubahan dari kecepatan, yaitu:

$$a(t) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = v'(t) \text{ atau } a(t) = v'(t) = s''(t).$$

Contoh 7.14

Pada pengamatan tertentu, sebuah partikel bergerak mengikuti sebuah pola yang merupakan fungsi jarak s atas waktu t, yaitu $s(t) = t^4 – 6t^2 + 12$. Tentukanlah panjang lintasan dan kecepatan pada saat percepatannya konstan.

Alternatif Penyelesaian:

Diketahui : $s(t) = t^4 – 6t^2 + 12$

Ditanya : $s(t)$ dan $v(t)$ pada saat $a(t) = 0$

Proses penyelesaian

Kecepatan adalah turunan pertama dari fungsi

$v(t) = s'(t) = 4t^3 – 12t.$

Percepatan adalah turunan pertama dari kecepatan

$a(t) = v'(t) = 12t^2 – 12 = 0$

$\Leftrightarrow 12(t + 1)(t – 1) = 0.$

Jadi, percepatan akan konstan pada saat $t = 1$ sehingga:

$v(1) = s'(1) = 4(1)^3 – 12(1) = –8$

$s(1) = (1)^4 – 6(1)^2 + 12 = 7.$

Contoh 7.15

Sebuah bidang logam dipanaskan di bagian tengah dan memuai sehingga mengalami pertambahan luas sebagai fungsi waktu $f(t) = 0{,}25t^2 + 0{,}5t$ (cm^2). Tentukan kecepatan perubahan pertambahan luas bidang tersebut pada saat $t = 5$ menit.

Alternatif penyelesaian pertama (dengan Numerik):

Kecepatan perubahan pertambahan luas adalah besar pertambahan luas dibandingkan dengan besar selisih waktu.

Perhatikan tabel!

Tabel 7.5. Nilai pendekatan $f(t) = 0{,}25t^2 + 0{,}5t$ pada saat t mendekati 5

Waktu (t)	$\Delta t = t - 5$	$\Delta f = f(t) - f(5)$	$\frac{\Delta f}{\Delta t}$
1	–4	–8	2
2	–3	–6,75	2,25
3	–2	–5	2,5
4	–1	–2,75	2,75
4,5	–0,5	–1,4375	2,875
4,9	–0,1	–0,2975	2,975
4,99	–0,01	–0,029975	2,9975
4,999	–0,001	–0,00299975	2,99975
4,9999	–0,0001	–0,000299997	2,999975
5	0,0000	0	?
5,0001	0,0001	0,000300002	3,000025
5,001	0,001	0,00300025	3,00025
5,01	0,01	0,030025	3,0025
5,1	0,1	0,3025	3,025
5,5	0,5	1,5625	3,125
6	1	3,25	3,25

Dengan melihat tabel di atas, pada saat t mendekati 5 maka Δt mendekati 0 dan $f(t)$ akan mendekati 3 (cm^2/menit).

Alternatif Penyelesaian kedua (dengan konsep Limit):

$$f(t) = 0{,}25t^2 + 0{,}5t$$

$$f(5) = 0{,}25(5)^2 + 0{,}5(5) = 8{,}75$$

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 5} \frac{f(t) - f(5)}{t-5} &= \lim_{t\to 5} \frac{(0{,}25t^2 + 0{,}5t) - f(5)}{t-5} \\
&= \lim_{t\to 5} \frac{0{,}25t^2 + 0{,}5t - 8{,}75}{t-5} \\
&= \lim_{t\to 5} \frac{0{,}5(0{,}5t^2 + t - 17{,}5)}{t-5} \\
&= \lim_{t\to 5} \frac{0{,}5(0{,}5t + 3{,}5)(t-5)}{t-5} \\
&= \lim_{t\to 5} 0{,}5(0{,}5t + 3{,}5) \\
&= 0{,}5(0{,}5 \times 5 + 3{,}5) \\
&= 3.
\end{aligned}$$

Alternatif Penyelesaian ketiga (dengan konsep Turunan):

$f(t) = 0{,}25t^2 + 0{,}5t$
$f'(\text{t}) = 0{,}5t + 0{,}5 = 0$
$f'(5) = 2{,}5 + 0{,}5 = 3.$
Kecepatan perubahan pertambahan luas bidang tersebut pada saat $t = 5$ menit adalah 3 (cm^2/menit).

7.4 Menggambar Grafik Fungsi

Berdasarkan konsep turunan yang diperoleh di atas, maka kita dapat menggambar kurva suatu fungsi dengan menganalisis titik stasioner, fungsi naik atau turun, titik optimalnya (maksimum atau minimum) dan titik belok. Perhatikan dan pelajarilah contoh berikut.

Contoh 7.16

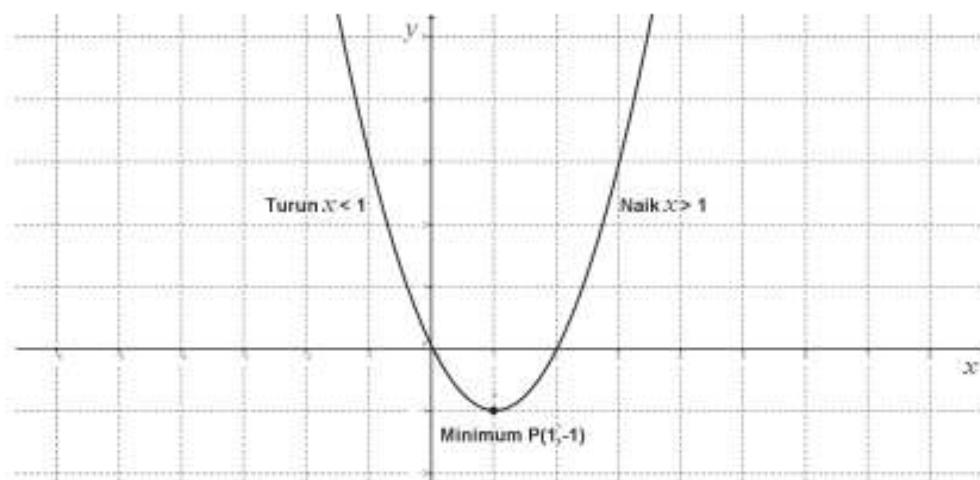
Dengan menggunakan konsep turunan, analisis kurva fungsi $f(x) = x^2 - 2x$.

Alternatif Penyelesaian:

a. Menentukan titik stasioner ($f'(x) = 0$)
   $f'(x) = 2x - 2 = 0$ atau $x = 1$
   Titik stasioner $P(1, -1)$

b. Menentukan interval fungsi naik/turun
   Fungsi naik pada ($f'(x) > 0$)
   $f'(x) = 2x - 2 > 0$ atau $x > 1$
   Fungsi turun pada ($f'(x) < 0$)
   $f'(x) = 2x - 2 < 0$ atau $x < 1$

c. Menentukan titik belok ($f''(x) = 0$)
   $f''(x) = 2 \neq 0$
   Tidak ada titik belok

d. Menentukan titik optimum
   Uji titik stasioner ke turunan kedua fungsi
   $f''(x) = 2 > 0$ disebut titik minimum di $P(1, -1)$.

Gambar 7.18: Grafik $f(x) = x^2 - 2x$

Latihan 7.7

Analisis dan sketsa kurva fungsi $f(x) = x^4 + 2x^3$.

Langkah 1. Tentukan nilai pembuat nol fungsi atau $f(x) = 0$.

Langkah 2. Tentukan titik stasioner atau $f'(x) = 0$.

Langkah 3. Tentukan interval fungsi naik $f'(x) > 0$ atau fungsi turun $f'(x) < 0$.

Langkah 4. Tentukan jenis titik balik fungsi dengan menganalisis kecekungan fungsi.

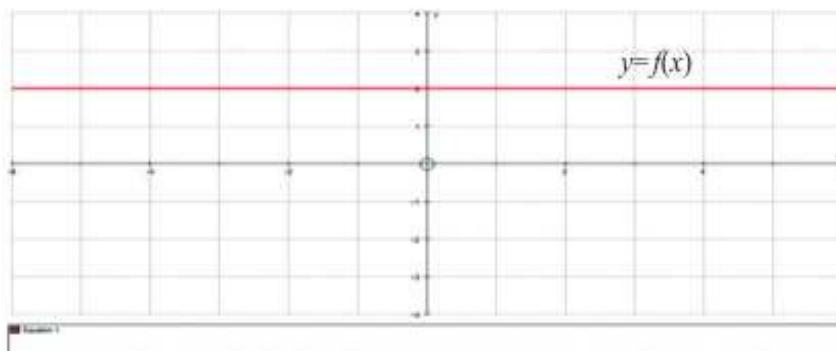
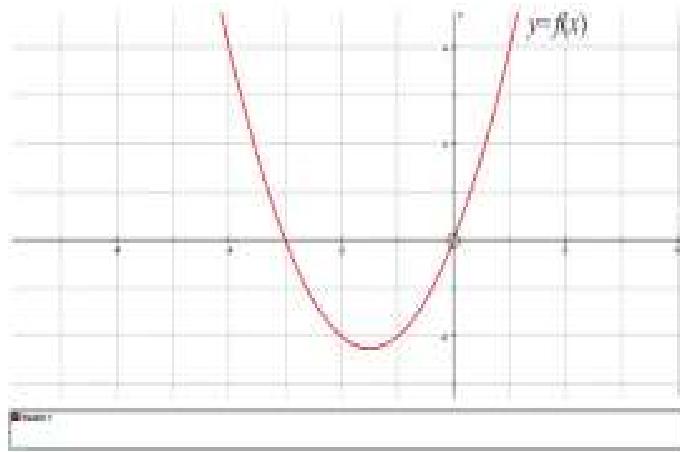
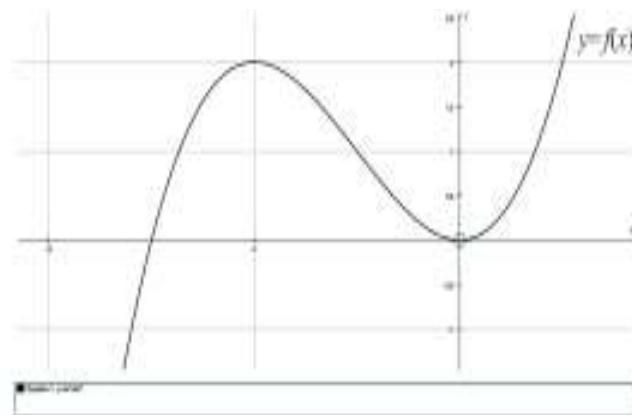
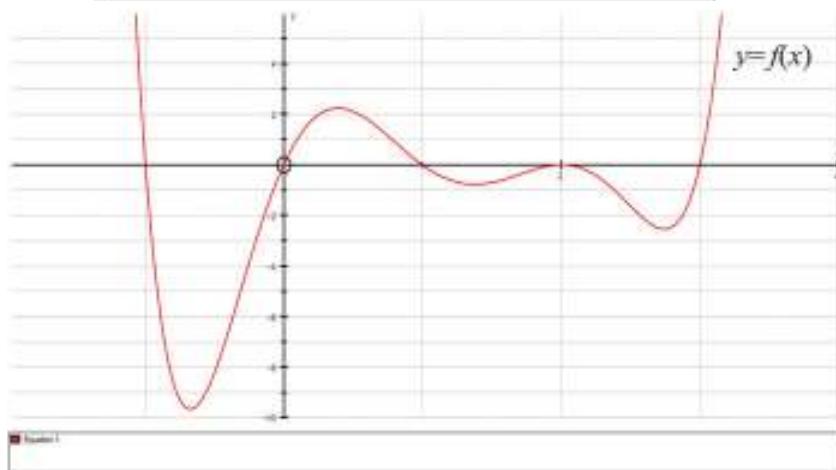
Langkah 5. Tentukan titik belok atau $f''(x) = 0$.

Langkah 6. Tentukan beberapa titik bantu.

Uji Kompetensi 7.2

1. Jika $\frac{d}{dx}[f(x)] = f'(x)$ adalah turunan pertama fungsi x dan $\frac{d}{dx}[f'(x)] = f''(x)$ adalah turunan keduanya, maka tentukan turunan kedua fungsi-fungsi berikut.
   a. $f(x) = 3x - 2$
   b. $f(x) = -2x^2 - x$
   c. $f(x) = -x^4 + 2x^2 - 4$
   d. $f(x) = (3x - 2)^2$
   e. $f(x) = \frac{2x}{x+1}$.

2. Tentukan titik balik fungsi-fungsi berikut!
   a. $f(x) = x^2 - 2x$
   b. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{3}{4}$
   c. $f(x) = x^3 - x$
   d. $f(x) = x^3 - 6x^2 - 9x + 1$
   e. $f(x) = x^4 - x^2$.

3. Tentukan titik belok fungsi-fungsi berikut!
   a. $f(x) = x^2 + 2x$
   b. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{3}{4}$
   c. $f(x) = x^3 - 6x$
   d. $f(x) = x^3 - 6x^2 - 9x + 1$
   e. $f(x) = x^4 - 4x^2$.
4. Analisis dan sketsa bentuk kurva dari fungsi-fungsi berikut dengan menunjukkan interval fungsi naik/turun, titik maksimum/minimum dan titik belok!
   a. $f(x) = x^2 - 2x$
   b. $f(x) = x^3 - x$
   c. $f(x) = x^4 - x^2$
   d. $f(x) = \frac{1}{x-1}$
   e. $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$.
5. Analisis (fungsi naik/turun, maksimum/minimum, titik belok) kurva dari suatu fungsi berdasarkan sketsa turunan pertamanya berikut.
   a.

b.

c.

d.

6. Seorang anak menggambar sebuah kurva tertutup setengah lingkaran dengan diameter 28 cm. Lalu, dia berencana membuat sebuah bangun segi empat di dalam kurva tersebut dengan masing-masing titik sudut segi empat menyinggung keliling kurva.
   a. Sketsalah kurva tertutup setengah lingkaran tersebut.
   b. Buatlah segi empat yang mungkin dapat dibuat dalam kurva. Sebutkanlah jenis-jenis segi empat yang dapat dibuat.
   c. Hitunglah luas masing-masing segi empat yang diperoleh.
   d. Segi empat yang manakah yang mempunyai luas terbesar? Carilah luas segi empat terbesar yang dapat dibuat dalam kurva tersebut dengan menggunakan konsep differensial.

7. Sebuah segi empat *OABC* dibuat pada daerah yang dibatasi oleh sumbu x, sumbu y dan kurva fungsi $y = (x - 1)^2$. Jika O adalah titik asal koordinat, A pada sumbu x, B pada kurva dan C pada sumbu y maka tentukanlah persamaan garis singgung dan persamaan garis normal di titik B agar luas *OABC* maksimum. Sketsalah permasalahan di atas.

8. Seorang karyawan berencana akan tinggal di rumah kontrakan setelah dia diterima bekerja di sebuah pabrik. Untuk menghemat biaya pengeluaran, ia berharap dapat tinggal di kontrakan yang tidak jauh dari tempat dia bekerja dan uang sewa kontrakan yang juga mendukung. Jika dia tinggal x km dari tempat bekerja maka biaya transportasi adalah c rupiah per km per tahun. Biaya kontrakan adalah $\frac{b}{x+1}$ per tahun (dalam rupiah), dengan b dan c adalah konstanta bernilai real positif dan $b > c$. Dapatkah kamu tentukan biaya minimum pengeluaran karyawan tersebut?

D. Penutup

Kita telah menemukan konsep turunan fungsi dan sifat-sifatnya dari berbagai pemecahan dunia nyata. Berdasarkan sajian materi terkait berbagai konsep dan sifat turunan fungsi di atas, beberapa hal penting dapat kita rangkum sebagai berikut:

1. Misalkan $f: R \to R$ adalah fungsi kontinu dan titik $P(x_1, y_1)$ dan $Q(x_1 + \Delta x, y_1 + \Delta y)$ pada kurva f. Garis sekan adalah yang menghubungkan titik P dan Q dengan gradien $m_{sec} = \dfrac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$

2. Misalkan f adalah fungsi kontinu bernilai real dan titik $P(x_1, y_1)$ pada kurva. Gradien garis tangen/singgung di titik $P(x_1, y_1)$ adalah nilai limit garis sekan di titik $P(x_1, y_1)$, ditulis $m_{\tan} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} m_{\sec} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$.

3. Misalkan fungsi $f: S \to R$, $S \subseteq R$ dengan $(c - \Delta x, c + \Delta x) \subseteq S$ dengan $\Delta x > 0$. Fungsi f dapat diturunkan pada titik c jika dan hanya jika nilai $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}$ ada.

4. Misalkan $f: S \to R$ dengan $S \subseteq R$. Fungsi f dapat diturunkan pada S jika dan hanya jika fungsi f dapat diturunkan pada setiap titik c di S.

5. Misalkan fungsi $f: S \to R$, $S \subseteq R$ dengan $c \in S$ dan $L \in R$. Fungsi f dapat diturunkan di titik c jika dan hanya jika nilai turunan kiri sama dengan nilai turunan kanan, ditulis: $f'(c) = L \Leftrightarrow \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} = L$.

6. Aturan Turunan:
   Misalkan f, u, v adalah fungsi bernilai real pada interval I, a bilangan real dapat diturunkan maka:
   a. $f(x) = a \rightarrow f'(x) = 0$
   b. $f(x) = ax \rightarrow f'(x) = a$
   c. $f(x) = ax^n \rightarrow f'(x) = ax^{n-1}$
   a. $f(x) = au(x) \rightarrow f'(x) = au'(x)$
   b. $f(x) = a[u(x)]^n \rightarrow f'(x) = au'(x)[u(x)]^{n-1}$
   c. $f(x) = u(x) \pm v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x) \pm v'(x)$
   d. $f(x) = u(x)v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
   e. $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)} \rightarrow \mathrm{f}'(\mathrm{x}) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$.

7. Misalkan f adalah fungsi bernilai real dan dapat diturunkan pada $x \in I$ maka
   a. Jika $f'(x) > 0$ maka kurva selalu naik pada interval I
   b. Jika $f'(x) < 0$ maka kurva selalu turun pada interval I
   c. Jika $f'(x) \geq 0$ maka kurva tidak pernah turun pada interval I
   d. Jika $f'(x) \leq 0$ maka kurva tidak pernah naik pada interval I.

8. Misalkan f adalah fungsi bernilai real yang kontinu dan ada turunan pertama dan kedua pada $x_1 \in I$ sehingga:
   a. Jika $f'(x_1) = 0$ maka titik $P(x_1, f(x_1))$ disebut dengan stasioner/kritis.
   b. Jika $f'(x_1) = 0$ dan $f''(x_1) > 0$ maka titik $P(x_1, f(x_1))$ disebut titik balik minimum fungsi.
   c. Jika $f'(x_1) = 0$ dan $f''(x_1) < 0$ maka titik $P(x_1, f(x_1))$ disebut titik balik maksimum fungsi.
   d. Jika $f''(x_1) = 0$ maka titik $P(x_1, f(x_1))$ disebut titik belok.

9. Kecepatan adalah laju perubahan dari fungsi $s = f(t)$ terhadap perubahan waktu t, yaitu:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} = f'(t) \text{ atau } v(t) = s'(t).$$

Percepatan adalah laju perubahan dari fungsi kecepatan $v(t)$ terhadap perubahan waktu t, yaitu:

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = v'(t) \text{ atau } a(t) = v'(t) = s''(t).$$

Selanjutnya, kita akan membahas tentang materi integral. Materi prasyarat yang harus kamu kuasai adalah himpunan, fungsi, limit fungsi, dan turunan. Hal ini sangat berguna dalam penentuan integral suatu fungsi sebagai antiturunan. Semua apa yang kamu sudah pelajari sangat berguna untuk melanjutkan bahasan berikutnya dan seluruh konsep dan aturan-aturan matematika dibangun dari situasi nyata dan diterapkan dalam pemecahan masalah kehidupan.

Integral

A. Kompetensi Dasar dan Pengalaman Belajar

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
Setelah mengikuti pembelajaran integral siswa mampu: 3.10 Mendeskripsikan integral taktentu (antiturunan) fungsi aljabar dan menganalisis sifat-sifatnya berdasarkan sifat-sifat turunan fungsi. 4.10 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan integral taktentu (antiturunan) fungsi aljabar. 3.13. Mendeskripsikan integral tak tentu (antiturunan) fungsi aljabar dan menganalisis sifat-sifatnya berdasarkan sifat-sifat turunan fungsi serta menentukan anti turunan fungsi aljabar dengan menggunakan sifat-sifat anti turunan fungsi. 4.13. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan integral tak tentu (antiturunan) fungsi aljabar.	Melalui proses pembelajaran integral, siswa memiliki pengalaman belajar sebagai berikut. • menemukan konsep integral melalui pemecahan masalah autentik; • berkolaborasi memecahkan masalah aktual dengan pola interaksi sosial kultur; • berpikir tingkat tinggi (berpikir kritis, kreatif) dalam menyelidiki dan mengaplikasikan konsep integral dalam memecahkan masalah autentik.

Istilah Penting

- Integral tak tentu
- Fungsi aljabar
- Derivatif
- Antiderivatif

B. Diagram Alir

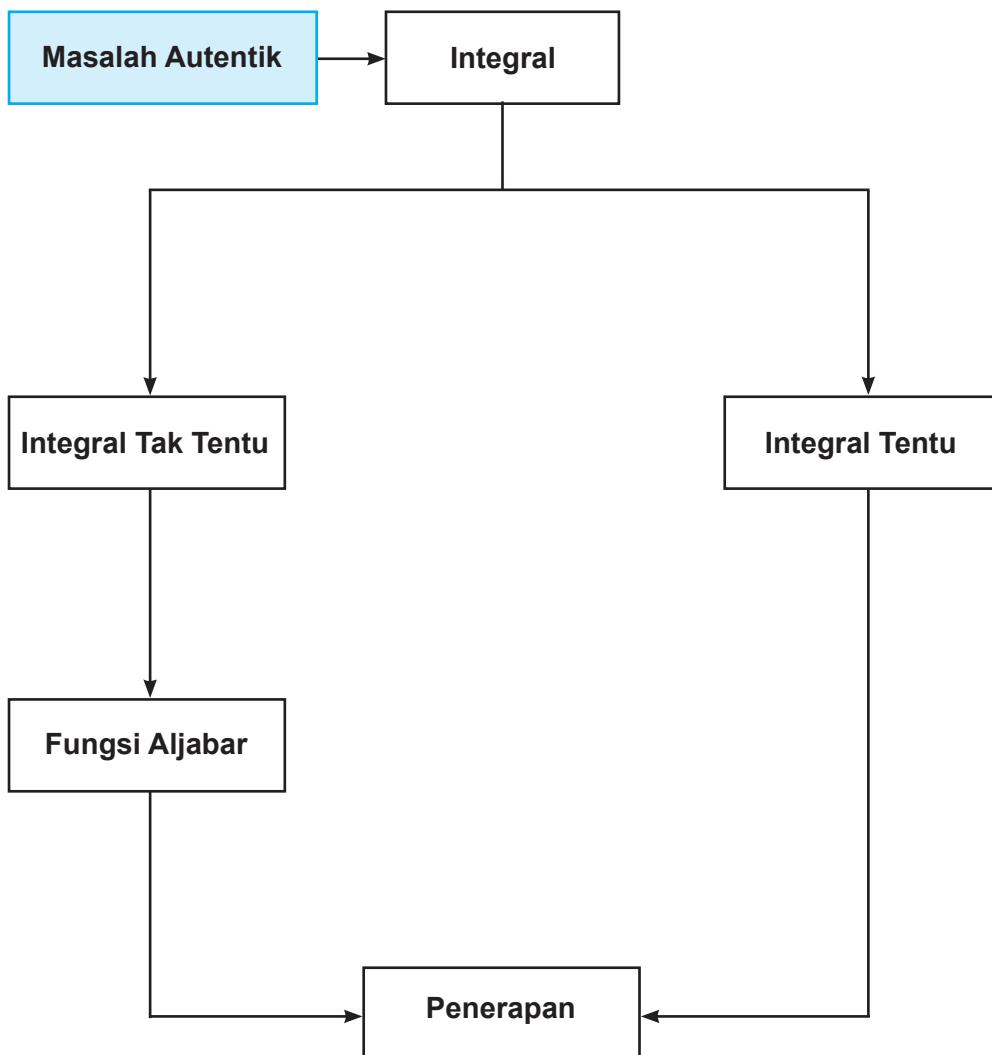
Masalah Autentik → Integral

Integral → Integral Tak Tentu

Integral → Integral Tentu

Integral Tak Tentu → Fungsi Aljabar

Fungsi Aljabar → Penerapan

Integral Tentu → Penerapan

C. Materi Pembelajaran

Setelah mempelajari konsep turunan, kamu akan mempelajari konsep integral sebagai kebalikan dari turunan fungsi. Dengan demikian, kamu akan memahami hubungan turunan dan integral. Keterlibatan integral sangat menentukan perkembangan ilmu kalkulus bahkan juga sangat berpengaruh dalam ilmu lain seperti geometri, teknologi, biologi, ekonomi dan lain-lain. Menurut sejarah, orang yang pertama kali mengemukakan tentang ide integral adalah Archimedes yang merupakan seorang ilmuwan bangsa Yunani yang berasal dari Syracusa (287 – 212 SM). Archimedes menggunakan ide integral tersebut untuk mencari luas daerah suatu lingkaran, luas daerah yang dibatasi oleh parabola, tali busur, dan sebagainya. Prinsip-prinsip dan teknik integrasi dikembangkan terpisah oleh **Isaac Newton** dan **Gottfried Leibniz** pada akhir abad ke-17. Menurut sejarah pengembangan kalkulus juga diperani oleh George Friederick Benhard Riemann (1826 – 1866).

8.1 Menemukan Konsep Integral Tak Tentu sebagai Kebalikan dari Turunan Fungsi

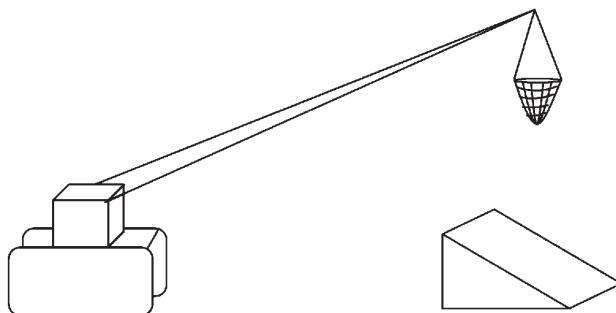
Mari kita ingat kembali konsep aplikasi turunan pada bidang fisika. Kecepatan adalah turunan pertama dari fungsi jarak dan percepatan adalah turunan pertama dari fungsi kecepatan. Bila kita berpikir kembali tentang aplikasi ini, bagaimana hubungan kecepatan jika percepatan yang diketahui. Hal ini mempunyai pemikiran terbalik dengan turunan, bukan? Nah, konsep inilah yang akan kita pelajari, yang disebut dengan integral.

Kita akan dibahas tentang arti dari ***”antiturunan”*** (anti derivatif), ***”integral tak tentu”***, dan beberapa hal dasar yang pada akhirnya membantu kita untuk menemukan teknik yang sistematik dalam menentukan suatu fungsi jika turunannya diketahui.

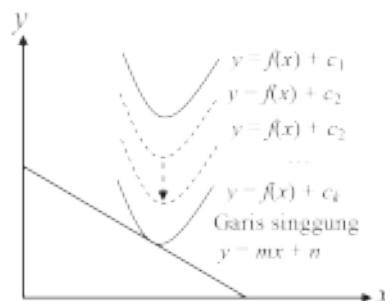
Masalah 8.1

Di pelabuhan selalu terjadi bongkar muat barang dari kapal ke dermaga dengan menggunakan mesin pengangkat/pemindah barang. Barang dalam jaring diangkat dan diturunkan ke dermaga. Terkadang barang diturunkan ke sebuah bidang miring agar mudah dipindahkan ke tempat yang diharapkan. Dari permasalahan ini, dapatkah kamu sketsa perpindahan barang tersebut? Dapatkah kamu temukan hubungan masalah ini dengan konsep turunan (Ingat pelajaran Turunan pada Bab 7)

Alternatif Penyelesaian:

Misalkan masalah di atas kita sketsa dengan sederhana pada gambar berikut:

Gambar 8.1. Barang diturunkan ke bidang miring

Sekarang, kita misalkan jaring (barang) yang diturunkan adalah sebuah fungsi, bidang miring sebuah garis, ketinggian adalah sumbu y, dan permukaan dermaga adalah sumbu x maka gambar tersebut dapat disketsa ulang dengan sederhana pada bidang koordinat kartesius.

Gambar 8.2. Jaring dan bidang miring sebagai kurva dan garis pada bidang koordinat kartesius

Gambar 8.3. Perubahan konstanta fungsi pada translasi kurva

Jika jaring tersebut sebuah kurva dan diturunkan pada Gambar 8.2 maka berdasarkan konsep Transformasi (translasi), terjadi perubahan nilai konstanta pada fungsi tersebut sampai akhirnya kurva tersebut akan menyinggung bidang miring atau garis. Perhatikan gambar 8.3!

Berdasarkan gambar tersebut, kurva yang bergerak turun akan menyinggung garis tersebut dengan konstanta n. Dengan demikian, kita akan menggunakan konsep gradien suatu garis singgung untuk menemukan hubungan turunan dan integral. Ingat kembali konsep gradien garis singgung yang kamu pelajari pada materi Turunan. Gradien garis singgung suatu fungsi pada suatu titik adalah nilai turunan pertama fungsi yang disinggung garis tersebut pada titik singgungnya. Berdasarkan konsep tersebut maka Gambar 8.3 memberikan informasi bahwa m adalah turunan pertama fungsi $y = f(x)$.

Secara notasi matematika dituliskan $m = \frac{dy}{dx} = f(x)$ sehingga $y = f(x)$ disebut anti turunan dari m. Dengan demikian anti turunan dari m adalah $y = f(x) + c$. Hal ini berarti bahwa nilai konstanta c dapat berubah-ubah.

Jadi, integral adalah antiturunan dari sebuah fungsi.

Masalah 8.2

Tentukan turunan fungsi-fungsi berikut.

a) $F(x) = \frac{1}{4}x^4$,

b) $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + 4$,

c) $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - 8$,

d) $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}$,

e) $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{13}{207}$,

Dapatkan kamu tentukan turunan fungsi-fungsi tersebut? Coba kamu turunkan fungsi-fungsi tersebut kemudian amatilah turunan nilai konstantanya! Hubungkan kembali fungsi awal dengan turunannya serta anti turunannya! Buatlah kesimpulan dari hasil pengamatan dari penyelesaian yang kamu peroleh! (petunjuk: turunan fungsi $F(x)$ adalah $F'(x) = f(x) = y'$)

Alternatif Penyelesaian:

Turunan fungsi:

a) $F(x) = \frac{1}{4}x^4$ adalah

$$F'(x) = f(x) = y' = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{4}x^4\right] = x^3.$$

b) $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + 4$ adalah

$$F'(x) = f(x) = y' = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{4}x^4 + 4\right] = x^3.$$

c) $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - 8$ adalah

$$F'(x) = f(x) = y' = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{4}x^4 - 8\right] = x^3$$

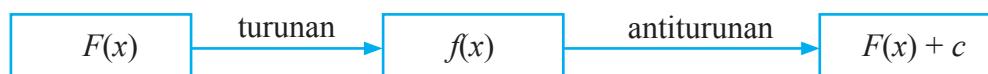
d) $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}$ adalah

$$F'(x) = f(x) = y' = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}\right] = x^3$$

e) $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{13}{207}$ adalah

$$F'(x) = f(x) = y' = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{13}{207}\right] = x^3$$

Jika dilakukan pengamatan terhadap kelima fungsi, maka seluruh fungsi $F(x)$ merupakan antiturunan dari fungsi $f(x) = x^3$, sementara fungsi $F(x)$ memiliki konstanta yang berbeda-beda. Jadi, dapat ditunjukkan bahwa sebuah fungsi dapat memiliki banyak antiturunan dengan konstanta yang berbeda.

$F(x)$ —turunan→ $f(x)$ —antiturunan→ $F(x) + c$

Secara induktif dapat diambil kesimpulan bahwa jika $F(x)$ adalah fungsi yang dapat diturunkan, yaitu $f(x)$ maka antiturunan dari $f(x)$ adalah $F(x) + c$ dengan c adalah sembarang konstanta.

Definisi 8.1

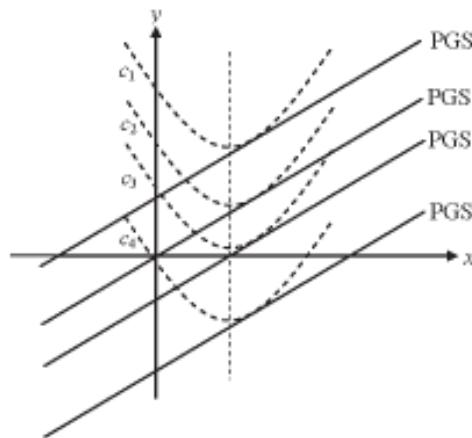
Untuk fungsi $f : R \rightarrow R$ *dan* $F:R \rightarrow R$ disebut antiturunan dari f jika dan hanya jika $F'(x) = f(x), \forall x \in R$.

Contoh 8.1

Jika $m = 2x - 4$ adalah gradien garis singgung dari sembarang kurva $f(x)$ maka tunjukkan bahwa terdapat banyak fungsi $f(x)$ yang memenuhi.

Alternatif Penyelesaian:

Dengan mengingat konsep gradien suatu garis singgung dengan turunan bahwa gradien adalah turunan pertama fungsi tersebut maka $m = \frac{dy}{dx} = 2x - 4$.

Berdasarkan Definisi 8.1 maka y adalah antiturunan dari gradien $\frac{dy}{dx} = 2x - 4$ sehingga dengan konsep turunan maka $y = x^2 - 4x + c$ dengan c adalah konstanta bernilai real. Perhatikan gambar berikut!

Gambar 8.4 Persamaan Garis Singgung (PGS) dan Fungsi $f(x)$

Pada Gambar 8.4 terdapat banyak garis yang sejajar dengan garis singgung suatu kurva, yang berarti terdapat banyak kurva yang disinggung oleh masing-masing garis tersebut. Ingat kembali konsep garis lurus dan persamaannya.

Contoh 8.2

Jika $y' = \frac{dy}{dx} = x^3$, tentukan nilai y dalam x.

Alternatif Penyelesaian:

Berdasarkan hasil turunan y terhadap x, maka nilai y haruslah mengandung unsur x^4, karena mengingat aturan turunan, yaitu jika $y = ax^n$ maka $y' = anx^{n-1}$.

Jadi jika $y' = \frac{dy}{dx} = x^3$ maka $y = \frac{1}{4}x^2 + c$.

Sifat 8.1

Proses menemukan y dari $\frac{dy}{dx}$ merupakan kebalikan dari sebuah proses turunan dan dinamakan antiturunan.

Sifat 8.2

Jika $F(x)$ adalah sebuah fungsi dengan $F'(x) = f(x)$ dapat dikatakan bahwa
a. turunan $F(x)$ adalah $f(x)$ dan
b. antiturunan dari $f(x)$ adalah $F(x)$.

Contoh 8.3

Carilah antiturunan dari

a) $y' = \frac{dy}{dx} = x^4$,

b) $y' = \frac{dy}{dx} = 2x^3$,

c) $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Alternatif Penyelesaian:

a) Turunan dari x^5 pastilah mengandung unsur x^4 sehingga $\frac{d}{dx}(x^5) = 5x^4$ dan $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{5}x^5\right) = x^4$.

Jadi antiturunan $y' = \frac{dy}{dx} = x^4$ adalah $y = \frac{1}{5}x^5$.

b) Turunan dari x^4 pastilah mengandung unsur x^3 sehingga
$\frac{d}{dx}(x^4) = 4x^3$ dan $\frac{d}{dx}\left(2\left(\frac{1}{4}x^4\right)\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{2}{4}x^4\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x^4\right) = 2x^3$.

Jadi antiturunan dari $y' = \frac{dy}{dx} = 2x^3$ adalah $y = \frac{1}{2}x^4$.

c) Berdasarkan soal diperoleh bahwa $\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$ sementara $\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$,
maka diperoleh $\frac{d}{dx}\left(2x^{\frac{1}{2}}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}} = x^{-\frac{1}{2}}$.

Jadi, antiturunan dari $y' = \frac{1}{\sqrt{x}}$ adalah $y = 2\sqrt{x}$.

Uji Kompetensi 8.1

1. Tentukan antiturunan dari fungsi-fungsi berikut:
   a. $f(x) = 2x$
   b. $f(x) = -3x$
   c. $f(x) = -\frac{3}{2}x$
   d. $f(x) = \frac{5}{3}x$
   e. $f(x) = ax$, untuk a bilangan real.
2. Tentukan antiturunan dari fungsi-fungsi berikut:
   a. $f(x) = 2x^2$
   b. $f(x) = -3x^3$
   c. $f(x) = -\frac{1}{2}x^{-2}$
   d. $f(x) = \frac{5}{3}x^{-6}$
   e. $f(x) = ax^{n+m}$, untuk a bilangan real dan $m + n$ bilangan bulat, $m + n \neq 1$.

3. Tentukan antiturunan dari fungsi-fungsi $f(x)$ berikut:

   a. $f(x) = x^{-2}$ e. $f(x) = 5\,x^{\frac{1}{3}}$

   b. $f(x) = 2x^{-3}$ f. $f(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

   c. $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ g. $f(x) = 100\,x^{\frac{1}{4}}$

   d. $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ h. $f(x) = \frac{a}{b}x^{n-1}$, dengan $a, b \in$ R, b $\in$ 0, n rasional.

4. Tentukan antiturunan $f(x)$ dengan memanfaatkan turunan fungsi $g(x)$ di bawah ini!
   a. Jika $f(x) = 8x^3 + 4x$ dan $g(x) = x^4 + x^2$
   b. Jika $f(x) = \sqrt{x}$ dan $g(x) = x\sqrt{x}$
   c. Jika $f(x) = (x + 2)^3$ dan $g(x) = (x + 2)^4$
   d. Jika $f(x) = (x - 2)^{-5}$ dan $g(x) = (x - 2)^{-4}$.

5. Jika gradien m suatu persamaan garis singgung terhadap fungsi $f(x)$ memenuhi $m = x^2 - 1$. Tunjukkan dengan gambar bahwa terdapat banyak fungsi $f(x)$ yang memenuhi gradien tersebut.

8.2 Notasi Integral

Kita telah banyak membahas tentang turunan dan antiturunan serta hubungannya pada beberapa fungsi yang sederhana. Pada kesempatan ini, kita akan menggunakan sebuah notasi operator antiturunan tersebut. Antiturunan dari sebuah fungsi $f(x)$ ditulis dengan menggunakan notasi "$\int$" (baca: integral).

Perhatikan kembali Masalah 8.2. Alternatif penyelesaian tersebut, dapat dituliskan kembali dengan menggunakan notasi integral.

a) Turunan $F(x) = \frac{1}{4}x^4$ adalah

$$F'(x) = f(x) = y' = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{4}x^4\right] = x^3 \text{ sehingga diperoleh}$$

$$F(x) = \int f(x)dx = \int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + c\,.$$

b) Turunan $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + 4$ adalah

$$F'(x) = f(x) = y' \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{4}x^4 + 4\right] = x^3 \text{ sehingga diperoleh}$$

$$F(x) = \int f(x)dx = \int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + c\,.$$

c) Turunan $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - 8$ adalah

$$F'(x) = f(x) = y' = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{4}x^4 - 8\right] = x^3 \text{ sehingga diperoleh}$$

$$F(x) = \int f(x)dx = \int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + c\,.$$

d) Turunan $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}$ adalah

$$F'(x) = f(x) = y' = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}\right] = x^3 \text{ sehingga diperoleh}$$

$$F(x) = \int f(x)dx = \int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + c\,.$$

e) Turunan $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{13}{207}$ adalah

$$F'(x) = f(x) = y' = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{13}{207}\right] = x^3 \text{ sehingga diperoleh}$$

$$F(x) = \int f(x)dx = \int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + c\,.$$

Contoh 8.4

Jika $y = 3x^4 + 2x^3$ tentukan $\frac{dy}{dx}$ dan $\int 4x^3 + 2x^2\, dx$.

Alternatif Penyelesaian:

Jika $y = 3x^4 + 2x^3$, maka diperoleh $\frac{dy}{dx} = \frac{d(3x^4 + 2x^3)}{dx} = 12x^3 + 6x^2$

$\int 12x^3 + 6x^2\, dx = 3x^4 + 2x^3 + c.$

$\Leftrightarrow \int 3(4x^3 + 2x^2)\, dx = 3x^4 + 2x^3 + c.$

$\Leftrightarrow 3\int 4x^3 + 2x^2\, dx = 3x^4 + 2x^3 + c.$

$\Leftrightarrow \int 4x^3 + 2x^2\, dx = x^4 + \frac{2}{3}x^3 + c.$

Jadi, $\int 4x^3 + 2x^2 dx = x^4 + \frac{2}{3}x^3 + c$.

8.3 Rumus Dasar dan Sifat Dasar Integral Tak Tentu

Berdasarkan pengamatan pada beberapa contoh, jika semua fungsi yang hanya dibedakan oleh nilai konstantanya diturunkan maka akan menghasilkan fungsi turunan yang sama sehingga bila diintegralkan akan mengembalikan fungsi turunan tersebut ke fungsi semula tetapi dengan konstanta c. Nilai konstanta c akan dapat ditentukan bila diketahui titik yang dilalui oleh fungsi asal tersebut. Titik asal (*intial value*) dapat disubstitusi ke fungsi hasil antiturunan sehingga nilai c dapat ditentukan.

Perhatikan Contoh 8.2, Jika $f(x)$ turunan dari $F(x)$ dengan $f(x) = x^3$ maka diperoleh $F(x) = \int x^3\, dx = \frac{1}{4}x^4 + c$ dengan c adalah konstanta. Secara induktif, dapat disimpulkan:

Sifat 8.3

Jika $F(x)$ adalah fungsi dengan $F'(x) = f(x)$ maka $\int f(x)\, dx = F(x) + c$.

Contoh 8.5

Diberikan turunan fungsi $F(x)$ dibawah ini kemudian tentukanlah $\int F(x)\, dx$

a. $F(x) = x^6$

b. $F(x) = \sqrt{x}$

c. $F(x) = 2\sqrt{x}$

d. $F(x) = x^4 + x^3$.

Alternatif Penyelesaian:

a. $F(x) = x^6$ maka $F'(x) = 6x^5$, sehingga

$\int 6x^5\, dx = x^6 + c.$

b. $F(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ maka $F'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, sehingga

$\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx = \sqrt{x} + c.$

c. $F(x) = 2\sqrt{x} = 2(x)^{\frac{1}{2}}$ maka $F'(x) = 2\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, sehingga

$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = 2\sqrt{x} + c.$

d. $F(x) = x^4 + x^3$ maka $F'(x) = 4x^3 + 3x^2$, sehingga

$\int 4x^3 + 3x^2\, dx = x^4 + x^3 + c.$

Masalah 8.3

Pada konsep turunan, kita dapat memperoleh aturan turunan dengan menggunakan konsep limit fungsi sehingga proses penurunan sebuah fungsi dapat dilakukan dengan lebih sederhana dan cepat. Bagaimana dengan konsep integral suatu fungsi? Adakah aturan yang dapat dimiliki agar proses integrasi suatu fungsi atau mengembalikan fungsi turunan ke fungsi semula dapat dilakukan dengan cepat?

Alternatif Penyelesaian:

Untuk menjawab permasalahan ini, akan dilakukan beberapa pengamatan pada beberapa contoh turunan dan antiturunan suatu fungsi yang sederhana. Kamu diminta mengamati dan menemukan pola dari proses antiturunan fungsi tersebut. Perhatikan Tabel 8.1

Tabel 8.1 Pola Hubungan Turunan dan Antiturunan fungsi $y = ax^n$

Turunan Fungsi ($f(x)$)	Antiturunan Fungsi ($F(x)$)	Pola
1	x	$1x^0 \rightarrow \frac{1}{1}x^1 = \frac{1}{0+1}x^{0+1}$
$2x$	x^2	$2x^1 \rightarrow \frac{2}{2}x^2 = \frac{2}{1+1}x^{1+1}$
$3x^2$	x^3	$3x^2 \rightarrow \frac{3}{3}x^3 = \frac{2}{1+1}x^{2+1}$
$8x^3$	$2x^4$	$8x^3 \rightarrow \frac{8}{4}x^3 = \frac{8}{3+1}x^{3-1}$
…	…	…
anx^{n-1}	ax^n	$anx^{n-1} \rightarrow \frac{a}{1}x^n = \frac{a}{(n-1)+1}x^{(n-1)+1}$
ax^n	?	$\frac{a}{n+1}x^{n+1}$

Dari pengamatan pada tabel tersebut, dapat dilihat sebuah aturan integral atau pola antiturunan dari turunannya yaitu $\int ax^n dx = \frac{a}{n+1}x^{n+1}$ dengan n bilangan rasional. Menurutmu, apakah ada syarat n yang harus dipenuhi pada aturan integrasi tersebut?

Coba kamu lakukan kembali percobaan berikut seperti pada Tabel 8.1. Amati dan dapatkan kembali kebenaran aturan integrasi di atas.

Tabel 8.2 Pola hubungan turunan dan antiturunan beberapa fungsi $F(x)$

Turunan Fungsi ($f(x)$)	Antiturunan Fungsi ($F(x)$)	Pola
…	x^{10}	…
…	x^2	…
…	$-3x^{12}$	…
…	$-3x^5 + 4x^5$	…
…	$0{,}5x^{0,5} - 1{,}25x^{1,5} + 2{,}5x^{1,5}$	…
…	$2x^{\frac{1}{3}}$	…
…	$\frac{1}{2}x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}x^{\frac{1}{2}}$	…
…	$\frac{3}{2}x^{\frac{1}{3}} - \frac{2}{3}x^{\frac{1}{2}}$	…
…	$2x^{-1}$	…
…	$0{,}55x^{-1}$	…
…	$\frac{3}{2}x^{-1}$	…

Dari hasil pengamatanmu pada Tabel 8.2, dapatkah kamu tentukan syarat n pada $y = ax^n$ agar pola integrasi tersebut berlaku secara umum? Apa yang kamu peroleh pada tiga baris terakhir pada Tabel 8.2? Buatlah sebuah kesimpulan dari hasil pengamatanmu.

Dengan adanya aturan tersebut, proses penyelesaian soal pada Contoh 8.4 dapat lebih sederhana. Amati kembali proses penyelesaian contoh tersebut pada Contoh 8.6 dan Contoh 8.7 berikut!

Contoh 8.6

Tentukan nilai $\int 4x^3 + 2x^2\, dx$.

Alternatif Penyelesaian:

$$\int 4x^3 + 2x^2 \, dx = \frac{4}{3+1}x^{3+1} + \frac{2}{2+1}x^{2+1} + c$$
$$= \frac{4}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + c$$
$$= x^4 + \frac{2}{3}x^3 + c.$$

Jadi, dengan menggunakan aturan tersebut, tidak perlu untuk mengetahui terlebih dahulu fungsi awalnya, tetapi cukup diketahui fungsi turunannya.

Contoh 8.7

Jika fungsi $F(x) = \int 3x^3 + 2x^2 - x + 1 \, dx$ melalui titik $A\left(1, -\frac{1}{12}\right)$ maka tentukanlah nilai $F(x)$!

Alternatif Penyelesaian:

$F(x) = \int 3x^3 + 2x^2 - x + 1 \, dx$

$F(x) = \frac{3}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + c.$

Jika fungsi melalui titik $A\left(1, -\frac{1}{12}\right)$ artinya $F(1) = -\frac{1}{12}$ sehingga diperoleh:

$F(1) = \frac{3}{4}1^4 + \frac{2}{3}1^3 - \frac{1}{2}1^2 + 1 + c = -\frac{1}{12}$

$\Leftrightarrow \frac{23}{12} + c = -\frac{1}{12}$ atau $c = -2$

Jadi, fungsi tersebut adalah $F(x) = -x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - 2.$

Dengan demikian, berdasarkan pengamatan pada tabel di atas, dapat ditarik kesimpulan akan aturan sebuah integrasi, sebagai berikut:

Sifat 8.4

Untuk n bilangan rasional dan $n \neq -1$ dengan a dan c konstanta real, maka

(i) $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$

(ii) $\int ax^n dx = \frac{a}{n+1}x^{n+1} + c$.

Contoh 8.8

Hitunglah integral berikut!

a) $\int 4x^3\, dx$

b) $\int \frac{1}{x^2} dx$

c) $\int \sqrt{x^3} dx$

d) $\int \frac{1}{\sqrt{x^3}} dx$.

Alternatif Penyelesaian:

a) $\int 4x^3\, dx \quad = \frac{4}{3+1} x^{3+1} + c$

$= x^4 + c$

b) $\int \frac{1}{x^2} dx \quad = \int x^{-2}\, dx$

$= \frac{1}{-2+1} x^{-2+1} + c$

$= -x^{-1} + c$

$= -\frac{1}{x} + c$.

c) $\int \sqrt{x^3} dx \quad = \int x^{\frac{3}{2}}\, dx$

$= \frac{1}{\frac{3}{2}+1} x^{\frac{3}{2}+1}$

$= \frac{1}{\frac{5}{2}} x^{\frac{5}{2}}$

$= \frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} + c$.

d) $\int \frac{1}{\sqrt{x^3}} dx = \int x^{-\frac{3}{2}} dx$

$= \frac{1}{-\frac{3}{2}+1} x^{-\frac{3}{2}+1}$

$= \frac{1}{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}}$

$= \frac{-2}{\sqrt{x}} + c$.

Sifat 8.5

Misalkan k bilangan real, $f(x)$ dan $g(x)$ merupakan fungsi yang dapat ditentukan integralnya, maka :

1. $\int dx = x + c$
2. $\int k\, dx = kx + c$
3. $\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
4. $\int k\, f(x)\, dx = k \int f(x)\, dx$
5. $\int [f(x) + g(x)]\, dx = f(x)\, dx + g(x)\, dx$
6. $\int [f(x) - g(x)]\, dx = f(x)\, dx - g(x)\, dx$.

Contoh 8.9

Tentukanlah hasil dari

a. $\int 2x^4 \sqrt{x^3}\, dx$

b. $\int (x+1)^2\, dx$

c. $\int \left(\frac{x^3 - 2x}{\sqrt{x}} \right) dx$.

Alternatif Penyelesaian:

a) $$\int 2x^4\sqrt{x^3}\,dx = \int 2x^4.x^{\frac{3}{2}}\,dx$$
$$= 2\int x^4.x^{\frac{3}{2}}\,dx$$
$$= 2\int x^{4+\frac{3}{2}}\,dx$$
$$= 2\left[\frac{1}{\frac{11}{2}+1}x^{\frac{11}{2}+1}+c\right]$$
$$= 2\left[\frac{1}{\frac{13}{2}}x^{\frac{13}{2}}+c\right]$$
$$= \frac{4}{13}x^{\frac{13}{2}}+c.$$

b) $$\int (x+1)^2\,dx = \int x^2+2x+1\,dx$$
$$= \frac{1}{2+1}x^{2+1}+\frac{2}{1+1}x^{1+1}+x+c$$
$$= \frac{1}{3}x^3+x^2+x+c.$$

c) $\int \left(\frac{x^3 - 2x}{\sqrt{x}} \right) dx = \int \left(\frac{x^3}{\sqrt{x}} - \frac{2x}{\sqrt{x}} \right) dx$

$$= \int \left(x^3.x^{-\frac{1}{2}} - 2x.x^{-\frac{1}{2}} \right) dx$$

$$= \int \left(x^{\frac{5}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} \right) dx$$

$$= \frac{1}{\frac{5}{2}+1} x^{\frac{5}{2}+1} - \frac{2}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{1}{2}+1} + c$$

$$= \frac{1}{\frac{7}{2}} x^{\frac{7}{2}} - \frac{2}{\frac{3}{2}} x^{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} - \frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{7} x^3 \sqrt{x} - \frac{4}{3} x\sqrt{x} + c.$$

Contoh 8.10

Diketahui fungsi biaya marginal dalam memproduksi suatu barang setiap bulan adalah $M_C = \frac{dC}{dQ} = \frac{2Q+6}{3}$. Tentukan fungsi biaya total dalam satu bulan!

Dengan:
Q = banyak produksi (*Quantity*)
C = biaya produksi (*Total Cost*)
MC= biaya marginal (*Marginal Cost*).

Alternatif Penyelesaian:

$$
\begin{aligned}
C(Q) &= \int\left(\frac{2Q+6}{3}\right)dQ \\
&= \int\frac{2}{3}(Q+3)dQ \\
&= \frac{2}{3}\int Q+3\,dQ \\
&= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}Q^2+3Q+c\right) \\
&= \frac{1}{3}Q^2+2Q+c.
\end{aligned}
$$

Contoh 8.11

Tentukan fungsi $y = F(x)$ dari persamaan diferensial $\frac{x^2dy}{dx} = -y^2\sqrt{x}$ dengan $y = 1$ di $x = 1$.

Alternatif Penyelesaian:

Langkah 1.

Ubah bentuk persamaan diferensial tersebut menjadi:

$$\frac{x^2dy}{dx} = y^2\sqrt{x} \Leftrightarrow -\frac{dy}{y^2} = \frac{\sqrt{x}}{x^2}dx$$

$$\Leftrightarrow y^{-2}dy = x^{-\frac{3}{2}}dx \text{ (ingat sifat eksponen)}$$

Langkah 2. Dengan mengintegralkan kedua ruas diperoleh:

$$\Leftrightarrow \int y^{-2} dy = \int x^{-\frac{3}{2}} dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{-2+1} y^{-2+1} = \frac{1}{-\frac{3}{2}+1} x^{-\frac{2}{3}+1} + c$$

$$\Leftrightarrow -y^{-1} = -2x^{\frac{1}{2}} + c$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{y} = \frac{-2}{\sqrt{x}} + c.$$

Langkah 3. Dengan mensubstitusi titik awal ke $-\frac{1}{y} = \frac{-2}{\sqrt{x}} + c$

Karena $y = 1$ di $x = 1$ maka $-\frac{1}{y} = \frac{-2}{\sqrt{x}} + c$ atau $c = 1$.

Jadi, fungsi tersebut adalah $-\frac{1}{y} = \frac{-2}{\sqrt{x}} + 1$ atau $y = \frac{\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}$.

Sifat 8.6

Misalkan $f_1(x)$, $f_2(x)$, . . . , $f_n(x)$ adalah fungsi yang dapat diintegralkan. Integral tak tentu hasil penjumlahan dua fungsi atau lebih sama dengan integral tak tentu dari masing-masing fungsi, yaitu:

$$\int \left(f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x)\right) dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x)\, dx + ... + \int f_n(x) dx.$$

Contoh 8.12

Tentukanlah nilai dari $\int (3x^6 - 2x^2 + 1)\, dx$.

Alternatif Penyelesaian:

$$\int (3x^6 - 2x^2 + 1)\, dx = 3\int x^6\, dx - 2\int x^2\, dx + \int 1\, dx$$
$$= \frac{3}{7}x^7 - \frac{2}{3}x^3 + x + c.$$

Contoh 8.13

Carilah nilai $f(x)$ jika $f'(x) = x^3 - 4x^2 + 3$ dan $f(0) = 1$.

Alternatif Penyelesaian:

$f'(x) = x^3 - 4x^2 + 3$ maka $f(x) = \int x^3 - 4x^2 + 3\, dx$

$f(x) = \int x^3 - 4x^2 + 3\, dx$

$\Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 3x + c$, karena $f(0) = 1$

$\Leftrightarrow f(0) = 0 - 0 + 0 + c = 1$, berarti $c = 1$.

Jadi, nilai $f(x)$ adalah $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 3x + 1$.

Masalah 8.4

Konsep antiturunan atau integral banyak berperan dalam menyelesaikan permasalahan dalam bidang fisika. Pada fisika juga banyak diperankan oleh konsep turunan, contohnya adalah permasalahan kecepatan dan percepatan. Dengan mengingat integral adalah balikan dari turunan, maka dapatkah kamu temukan hubungan konsep turunan dan integral dalam permasalahan kecepatan dan percepatan? Coba kamu tunjukkan peran integrasi pada hubungan besaran tersebut?

Alternatif Penyelesaian:

Ingat kembali konsep yang telah diuraikan pada materi turunan. Pergerakan sebuah objek yang semakin menjauhi ataupun semakin mendekati berarti ada terjadi perubahan pergerakan pada lintasan, sehingga kecepatan adalah laju perubahan dari lintasan terhadap perubahan waktu, yaitu:

$v(t) = \dfrac{ds(t)}{dt}$ atau $v(t) = s'(t)$ sehingga $s(t) = \int v(t)\,dt$.

Pergerakan dipercepat atau diperlambat berhubungan dengan kecepatan objek tersebut, yaitu terjadi perubahan kecepatan kendaraan. Percepatan adalah laju perubahan kecepatan terhadap perubahan waktu, yaitu:

$a(t) = \dfrac{dv(t)}{dt}$ atau $a(t) = v'(t) = s''(t)$ sehingga $v(t) = \int a(t)\,dt$.

dengan:

t = waktu

$s(t)$ = fungsi lintasan

$v(t)$ = fungsi kecepatan

$a(t)$ = fungsi percepatan.

Masalah 8.5

Jika diketahui percepatan sebuah benda yang bergerak pada garis koordinat adalah $a(t) = -2t^2 + 3t + 1$. Tentukanlah fungsi posisi benda tersebut.

Alternatif Penyelesaian:

Dengan menggunakan konsep di atas maka :

$v(t) = \int a(t)\,dt$ atau $v(t) = \int -2t^2 + 3t + 1\,dt$

$v(t) = -\dfrac{2}{3}t^3 + \dfrac{3}{2}t^2 + t + c$

Kemudian

$s(t) = \int v(t)\,dt$ atau $s(t) = \int -\frac{2}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 + t + c\,dt$

$$s(t) = \frac{-\frac{2}{3}}{4}t^4 + \frac{\frac{3}{2}}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + ct + d$$

$$s(t) = -\frac{1}{6}t^4 + \frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + ct + d\,.$$

Uji Kompetensi 8.2

1. Selesaikanlah !

   a. Jika $y = x^8$, carilah $\frac{dy}{dx}$ kemudian tentukan $\int x^7\,dx$ dan $\int 2x^7\,dx$..

   b. Jika $y = x^{\frac{1}{2}}$, carilah $\frac{dy}{dx}$ kemudian tentukan nilai $\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx$ dan $\int 2x^{\frac{1}{2}}\,dx$.

   c. Jika $y = 4x^4 - 2x^2$, carilah nilai $\frac{dy}{dx}$ kemudian tentukan $\int (16x^3 - 4x)\,dx$.

   d. Jika $y = (3x + 1)^4$, carilah nilai $\frac{dy}{dx}$ kemudian tentukan $\int (3x + 1)^3\,dx$.

   e. Jika $y = \sqrt{1-4x}$, carilah $\frac{dy}{dx}$ nilai kemudian tentukan $\int \frac{1}{\sqrt{1-4x}}\,dx$..

2. Selesaikan integral berikut!

   a. $\int 3x\, dx$ e. $\int x^{10}\, dx$

   b. $\int 3x^3\, dx$ f. $\int 28x^{27}$ dx

   c. $\int 5x^4\, dx$ g. $\int 20x^{59}$ dx

   d. $\int -x^5\, dx$ h. $\int \frac{2}{x^{-4}}\, dx$.

3. Tentukan nilai dari:

   a. $\int \left(x^2 + \frac{3}{x} \right) dx$

   b. $\int \left(\frac{1}{2x} + x^2 - e^x \right) dx$

   c. $\int \left(5e^x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{x} \right) dx$.

4. Buktikan!

   a. $\int [f(x) + g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx.$

   b. $\int [f(x) - g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx - \int g(x)\, dx.$

   Petunjuk: anggap $F(x)$ merupakan antiturunan dari $f(x)$ dan $G(x)$ merupakan antiturunan dari $g(x)$. Selanjutnya, carilah $\frac{d}{dx}(F(x) + G(x))$.

5. Tentukan nilai dari:

a. $\int \frac{3x+2}{\sqrt{x}}\,dx$

b. $\int \frac{x^2-4x+10}{x^2\sqrt{x}}\,dx$

c. $\int (x+1)^3\,dx$.

6. Selesaikanlah integral berikut!

a. $\int x\left(\sqrt{x}-1\right)dx$

b. $\int 2\left(\frac{1}{x}-x\right)dx$

c. $\int 3x\left(\frac{3}{x^2}-1\right)dx$

d. $\int \frac{x^9-3}{x^3}\,dx$

e. $\int \frac{x^2-3}{x^2}\,dx$

f. $\int \left(2x-\frac{3}{x}\right)^2 dx$.

7. Tentukan nilai y jika:

a. $\frac{dy}{dx} = 10$

b. $\frac{dy}{dx} = 2x^2 - 4$

c. $\frac{dy}{dx} = 4x^3 + 3x^2$

d. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+2x-5}{x^2}$

e. $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sqrt{x}} + 2\sqrt{x}$.

8. Carilah nilai $f(x)$ jika:

a. $f'(x) = 2x - 1$ dan $f(0) = 3$

b. $f'(x) = \sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}$ dan $f(1) = 1$.

9. Selesaikan persamaan-persamaan diferensial berikut:
   a. $\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 4x - 1$, $y = 5$ di $x = 2$.
   b. $\frac{dy}{dx} = (2x + 1)^4$, $y = 6$ di $x = 0$.
   c. $\frac{dy}{dx} = -y^{2x}(x^2 - 2)^4$, $y = 1$ di $x = 0$.
10. Tentukan persamaan fungsi implisit $F(x, y) = 0$ yang melalui titik $(2, -1)$ dan gradien garis singgung di setiap titik (x, y) pada grafiknya ditentukan persamaan $y = \frac{x}{4y}$, $y \neq 0$.
11. Tentukan persamaan fungsi f, jika fungsi $y = f(x)$ terdefinisi untuk $x > 0$ melalui titik $(4, 0)$ dan gradien garis singgungnya di setiap titik ditentukan oleh persamaan $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}$.
12. Tentukan persamaan fungsi f jika grafik fungsi $y = f(x)$ melalui titik $(1, 2)$ dan gradien garis singgung di setiap titiknya ditentukan oleh persamaan $y' = 1 - 16x^{-4}$, $x \neq 0$.
13. Sebuah objek berjalan sepanjang suatu garis koordinat menurut percepatan a (dalam centimeter per detik) dengan kecepatan awal v_0 (dalam centimeter per detik) dan jarak s_0 (dalam centimeter). Tentukan kecepatan v beserta jarak berarah s setelah 2 detik.
    a. $a = t$, $v_0 = 2$, $s_0 = 0$
    b. $a = (1 + t)^{-3}$, $v_0 = 4$, $s_0 = 6$
    c. $a = \sqrt[3]{2t + 1}$, $v_0 = 0$, $s_0 = 10$
    d. $a = (1 + t)^{-3}$, $v_0 = 4$, $s_0 = 0$.

Soal Proyek

Kumpulkan masalah tentang penerapan integral tak tentu dari fungsi aljabar dalam berbagai bidang maupun masalah nyata yang ada di sekitarmu. Ujilah sifat-sifat dan rumus dasar tentang integral tak tentu di dalam pemecahan masalah tersebut, kemudian buatlah laporan hasil karyamu untuk disajikan di depan kelas.

D. Penutup

Beberapa hal penting sebagai kesimpulan dari hasil pembahasan materi Integral, disajikan sebagai berikut:

1. Integral merupakan antiturunan, sehingga integral saling invers dengan turunan.
2. Jika $F(x)$ adalah sebuah fungsi dengan $F'(x) = f(x)$ dapat dikatakan bahwa:
   a. Turunan dari $F(x)$ adalah $f(x)$ dan
   b. Antiturunan dari $f(x)$ adalah $F(x)$
3. Jika $F(x)$ adalah sebarang antiturunan dari $f(x)$ dan c adalah sebarang konstanta, maka $F(x) + c$ juga antiturunan dari $f(x)$.
4. Jika $F'(x) = f(x)$ maka $\int f(x)\, dx = F(x) + c$.

Daftar Pustaka

Anton. Howard, Rorres. Chris. (2005). *Elementary Linear Algebra with Applications*. John Wiley & Sons, Inc.

Ball, Deborah Loewenberg. (2003). *Mathematical Proficiency for All Students (Toward a Strategic Research and Development Program in Mathematics Education*). United States of America: RAND.

Checkley , Kathy (2006). *The Essentials of Mathematics, Grades 7 -12*. United States of America: The Association for Supervision and Curriculum Development (ASCD).

Chung, Kai Lai. (2001). *A Course in Probability Theory*, USA: Academic Press.

Committee on science and mathematics teacher preparation, center for education national research council (2001). *Educating Teachers of Science, Mathematics, and Technology (New Practice for New Millennium)*. United States of America: the national academy of sciences.

Douglas. M, Gauntlett. J, Gross. M. (2004). *Strings and Geometry*. United States of America: Clay Mathematics Institute.

Hefferon, Jim (2006). *Linear Algebra*. United States of America: Saint Michael's College Colchester.

Howard, dkk. (2008). *California Mathematics. Consepts, Skills, and Problem Solving 7*. Columbus-USA, The McGraw-Hill Companies, Inc.

Johnstone. P.T. (2002). *Notes on Logic and Set Theory*. New York: University of Cambridge.

Magurn A, Bruce. (2002). *Encyclopedia of Mathematics and Its Applications*. United Kingdom: United Kingdom at the University Press, Cambridge.

Slavin, Robert, E. (1994). *Educational Psychology, Theories and Practice*. Fourth Edition. Masschusetts: Allyn and Bacon Publishers.

Sinaga, Bornok. (2007). *Pengembangan Model Pembelajaran Matematika Berdasarkan Masalah Berbasis Budaya Batak*. Surabaya: Program Pascasarjana UNESA.

Tan, Oon Seng. (1995). *Mathematics. A Problem Solving Approach*. Singapore: Federal Publication (S) Pte Lsd.

Urban. P, Owen. J, Martin. D, Haese. R, Haese. S. Bruce. M. (2005). *Mathematics for The International Student* (*International Baccalaureate Mathematics HL Course*). Australia: Haese & Harris Publication.

Van de Walle, John A. (1990). *Elementary School Mathematics: Teaching Developmentally*. New York: Longman.

Van de Walle. Jhon, dkk. (2010). *Elementary and Middle School Mathematics* (*Teaching Developmentally*). United States of America: Allyn & Bacon.

Profil Penulis

Nama Lengkap : Prof. Dr. Bornok Sinaga, M.Pd
Telp. Kantor/HP : (061) 661365
E-mail : bornoksinaga48@gmail.com
Akun Facebook : -
Alamat Kantor : Sekolah Pasca Sarjana Universitas Negeri Medan. Jl. Willem Iskandar Psr V Medan Estate, Medan, Sumatera Utara
Bidang Keahlian : Pendidikan Matematika

Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir

1. Dosen di Jurusan Pendidikan Matematika Universitas Pattimura, Ambon. (1991 - 1999)
2. Dosen di Jurusan Matematika Universitas Negeri Medan (2000 - sekarang)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar

1. S3 : Program Pasca Sarjana/Pendidikan Matematika/Universitas Negeri Surabaya (2004 – 2007)
2. S2 : Program Pasca Sarjana/Pendidikan Matematika/IKIP Negeri Surabaya (1996 – 1999)
3. S1 : Fakultas Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam/Pendidikan Matematika/IKIP Negeri Medan (1984 – 1989)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir)

1. Matematika Kelas VII SMP - Untuk Siswa (Buku Kemendikbud Kurikulum 2013) (2013)
2. Buku Matematika Untuk Guru Kelas VII SMP (Buku Kemendikbud Kurikulum 2013) (2013)

Nama Lengkap : Andri Kristianto S., S.Pd., M.Pd.
Telp. Kantor/HP : (061) 6625970
E-mail : andritanggang84@gmail.com
Akun Facebook : -
Alamat Kantor : Jl .Willem Iskandar Pasar V
Medan Estate, Medan 20222
Bidang Keahlian : Matematika

Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 tahun Terakhir:

1. Dosen Matematika di Fakultas Ilmu Pendidikan UNIMED (2012 - sekarang)
2. Dosen di STKIP Riama Medan (2010 - 2012)
3. Dosen Di Universitas Darma Agung Medan (2010 - 2012)
4. Guru Matematika di SMK 11 Medan (2007 - 2010)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar

1. S2 : Program Pascasarjana Universitas Negeri Medan/ Pendidikan Dasar Matematika/Universitas Negeri Medan/ (2007 – 2010)
2. S1 : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam/Matematika/Pendidikan Matematika/Universitas Negeri Medan (2002 – 2007)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir)

1. Buku Matematika Kelas VII SMP Penerbit Kemendikbud (2013)
2. Buku Matematika Kelas X SMA Penerbit Kemendikbud (2013)
3. Buku Matematika Kelas X SMA Penerbit Kemendikbud (2013)

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir)

1. Efektivitas Pembelajaran Konstruktivisme Pada Pokok Bahasan Himpunan di Kelas VII SMP Swasta Trisakti 2 Medan. 2007
2. Upaya Meningkatkan Kemampuan Berpikir Logis dan Komunikasi Matematis Siswa SMP Melalui Pembelajaran Matematika Realistik. 2010
3. Pengembangan Model Pembelajaran Matematika dan Asesmen Otentik Berbasis Kurikulum 2013 untuk Meningkatkan Kualitas Sikap, Kemampuan Berpikir Kreatif dan Koneksi Matematika Siswa SMA. 2016.

Nama Lengkap : Tri Andri Hutapea, S.Si., M.Sc
Telp. Kantor/HP : (061) 661356
E-mail : triandh_A19@yahoo.com
Akun Facebook : -
Alamat Kantor : Universitas Negeri Medan
Jl.Willem Iskandar Pasar V Medan Estate,
Medan Sumatera Utara
Bidang Keahlian : Matematika

Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 tahun Terakhir

1. Dosen Jurusan Matematika, FMIPA Universitas Negeri Medan. (2006 - sekarang)
2. Penulis Buku Matematika (Buku Siswa dan Buku Guru) Berbasis Kurikulum 2013 Kelas X dan Kelas XI SMA/SMK. (2013 - 2016)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar

1. S2 : MIPA/Matematika/Matematika (Matematika Terapan)/Universitas Gadjah Mada (2008 – 2010)
2. S1 : MIPA/Matematika/Matematika Sains/Universitas Negeri Medan (2000 – 2005)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir)

1. Buku Matematika (Buku Siswa) Berbasis Kurikulum 2013 Kelas X SMA/ SMK (2013 – 2016).
2. Buku Matematika (Buku Guru) Berbasis Kurikulum 2013 Kelas X SMA/ SMK (2013 – 2016).
3. Buku Matematika (Buku Siswa) Berbasis Kurikulum 2013 Kelas XI SMA/ SMK (2013 – 2016).
4. Buku Matematika (Buku Guru) Berbasis Kurikulum 2013 Kelas XI SMA/ SMK (2013 – 2016).

Nama Lengkap : Lasker Pangarapan Sinaga, S.Si., M.Si
Telp. Kantor/HP : (061) 661365
E-mail : lazer_integral@yahoo.com
Akun Facebook : –
Alamat Kantor : Jl.Willem Iskandar Pasar V Medan Estate, Medan Sumatera Utara.
Bidang Keahlian : Matematika

Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir

1. Dosen di Fakultas Ilmu Pendidikan UNIMED

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar

1. S2: SPs USU/Matematika/Optimisasi dan Teori Riset/Universitas Sumatera Utara (2007–2009)
2. S1: FMIPA/Matematika/Matematika Murni/Universitas Sumatera Utara (1998–2003)

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir)

1. Analisis Persoalan Optimisasi Konveks Dua Tahap (2010)
2. Konvergensi dan Stabilitas Solusi Persamaan Laplace pada Batas Dirichlet (2011)
3. Konvergensi dan Kontinuitas Deret Kuasa Solusi Persamaan Laplace Dimensi N (2013)
4. Analisis Solusi Eksak dan Solusi Elemen Hingga Persamaan Laplace Orde Dua (2014)

Nama Lengkap : Sudianto Manullang S.Si., M.Sc
Telp. Kantor/HP : (061) 6625970
E-mail : Sudianto.manullang@unimed.ac.id
Akun Facebook : -
Alamat Kantor : Jalan Williem Iskandar Pasar V
Medan Estate, Medan – Sumatera Utara.
Bidang Keahlian : Matematika

Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir

1. Dosen di Jurusan Matematika Universitas Negeri Medan (2006-sekarang)
2. Staf Ahli Program Pascasarjana UNIMED (2005-2006)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar

1. S2 : Fakultas MIPA/Jurusan Matematika/Program Studi Matematika/Universitas Gadjah Mada (UGM) (2008-2011)
2. S1 : Fakultas MIPA/Jurusan Matematika/Program Studi Matematika/Universitas Negeri Medan (UNIMED) 2000-2005

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir)

1. Buku Siswa: Pelajaran Matematika Kelas 7 SMP Kurikulum 2013 (2013)
2. Buku Guru: Pelajaran Matematika Kelas 7 SMP Kurikulum 2013 (2013)
3. Buku Siswa: Pelajaran Matematika Kelas 10 SMA Kurikulum 2013 (2013)
4. Buku Guru: Pelajaran Matematika Kelas 10 SMA Kurikulum 2013 (2013)
5. Buku Siswa: Matematika Kelas 7 SMP (2013)
6. Buku Guru: Matematika Kelas 7 SMP (2013)
7. Buku Siswa: Matematika Kelas 10 SMA (2013)
8. Buku Guru: Pelajaran Matematika Kelas 10 SMA (2013)
9. Buku Guru: Pelajaran Matematika Kelas 11 SMA Kurikulum 2013 (2014)
10. Buku Siswa: Pelajaran Matematika Kelas 11 SMA Kurikulum 2013 (2014)

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir)

1. Peramalan Kebutuhan Listrik Kota Medan (2007)
2. Application of Vasicek's Rate Interest Model in Term Insurance Premiums Calculation. (2011)
3. Pendanaan Dana Pensiun dengan Metode Benefit Prorate (2012)

Nama Lengkap : Mangaratua Marianus S., S.Pd., M.Pd.
Telp. Kantor/HP : (061) 661365
E-mail : mangaratuasimanjorang@gmail.com
Akun Facebook : -
Alamat Kantor : Jl. Willem Iskandar Psr V Medan Estate, Medan, Sumatera Utara
Bidang Keahlian : Matematika

Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir:

1. Guru Matematika Seminari Menengah Pematang Siantar. (2001 - 2005)
2. Guru Matematika di SMA Universitas HKBP Nommensen, Pematang Siantar. (2002 - 2005)
3. Guru di SMA Budi Mulia Pematang Siantar (2004 - 2005)
4. Dosen di Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan HKBP Nommensen, Pematang Siantar (2008 - 2009)
5. Dosen di Jurusan Matematika, FaKultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas negeri Medan (2008 - sekarang)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S3: School Of Education, Murdoch University, Perth, Australia (2011)
2. S2: Program Pasca Sarjana/Pendidikan Matematika/ Universitas Negeri Surabaya (2005 – 2007)
3. S1: Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan/Pendidikan Matematika/Universitas HKBP Nommensen (1998 – 2003)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

1. Buku Ajar Matematika SD Kelas 1 (Pembelajaran Matematika Realistik) (2009)
2 Matematika Kompeten Berhitung untuk Sekolah Dasar Kelas V (2010)
3 Matematika Kompeten Berhitung untuk Sekolah Dasar Kelas VI (2010)
4 Buku Panduan Guru Kelas X SMA/MA terkait kurikulum 2013 Jilid 1 (2013)
5 Buku Teks Siswa Kelas X SMA/MA terkait kurikulum 2013 Jilid 1 (2013)
6 Buku panduan guru kelas VII SMP/MTs terkait kurikulum 2013 Jilid 1 (2013)
7 Buku Teks siswa kelas VII SMP/MTs terkait kurikulum 2013 Jilid 1 (2013)

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

1. Pengembangan Model Pembelajaran Matematika Berdasarkan Masalah Berbasis Budaya Batak (PBM-B3) (2007)
2. Pembelajaran Matematika Realistik Untuk Topik Dimensi Tiga di Kelas X SMA Kampus FKIP Universitas HKBP Nommensen Pematangsiantar (2007)

Nama Lengkap : Pardomuan N. J. M. Sinambela, S.Pd., M.Pd.
Telp. Kantor/HP : (061)661365
E-mail : pardomuannjmsinambela@gmail.com
Akun Facebook : -
Alamat Kantor : Jl.Willem Iskandar Pasar V Medan Estate, Medan Sumatera Utara.
Bidang Keahlian : Pendidikan Matematika

Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir

1. Dosen di Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Karo, Kabanjahe. (2006 - 2008)
2. Dosen di Program Studi Pendidikan Matematika Universitas HKBP Nommensen. (2007)
3. Dosen di Jurusan Matematika Universitas Negeri Medan (2008 - sekarang)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar

1. S2 : Program Pasca Sarjana/Pendidikan Matematika/ Universitas Negeri Surabaya (2003 - 2006)
2. S1 : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam/Pendidikan Matematika/Universitas Negeri Medan (1997 - 2002)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir)

1. Matematika Kompeten Berhitung untuk Sekolah Dasar Kelas V (2010)
2 Matematika Kompeten Berhitung untuk Sekolah Dasar Kelas VI (2010)
3 Buku panduan guru kelas X SMA/MA terkait kurikulum 2013 Jilid 1 (2013)
4 Buku Teks siswa kelas X SMA/MA terkait kurikulum 2013 Jilid 1 (2013)
5 Buku panduan guru kelas VII SMP/MTs terkait kurikulum 2013 Jilid 1 (2013)
6 Buku Teks siswa kelas VII SMP/MTs terkait kurikulum 2013 Jilid 1 (2013)

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir)

1. Keefektifan Model Pembelajaran Berdasarkan Masalah (Problem Based Instruction) Dalam Pembelajaran Matematika Untuk Pokok Bahasan Sistem Persamaan Linear dan Kuadrat di Kelas X SMA Negeri 2 Rantau Selatan, Sumatera Utara (2006)
2. Penerapan Model Pembelajaran Bermuatan Soft Skill dan Pemecahan Masalah dengan bantuan Asesmen Autentik dalam meningkatkan kemampuan komunikasi matematis dan kreatifitas berfikir mahasiswa dalam pemecahan masalah serta meningkatkan kualitas proses pembelajaran mata kuliah Matematika Diskrit 1 (2009)
3. Pemetaan dan Pengembangan Model Peningkatan Mutu Pendidikan di Kabupaten Simalungun dan Kota Pematang siantar Sumatera Utara (2011)
4. Pengembangan model pembelajaran matematika dan asesmen otentik berbasis kurikulum 2013 untuk meningkatkan kualitas sikap, kemampuan berpikir kreatif dan koneksi matematika siswa SMA (2015)

Profil Penelaah

Nama Lengkap : Dr. Agung Lukito, M.S.
Telp. Kantor/HP : +62 31 829 3484
E-mail : gung_lukito@yahoo.co.id
Akun Facebook : -
Alamat Kantor : Kampus Unesa Ketintang
Jalan Ketintang Surabaya 60231
Bidang Keahlian : Matematika dan Pendidikan Matematika

Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir:

1. Dosen pada Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Surabaya. (2010 - 2016)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S3 : Faculty of Mathematics and Informatics/Delft University of Technology (1996 - 2000)
2. S2 : Fakultas Pascasarjana/Matematika/ITB Bandung (1988 - 1991)
3. S1 : Fakultas PMIPA/Pendidikan Matematika/Pendidikan Matematika/IKIP Surabaya (1981 - 1987)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

1. Buku Teks Matematika kelas 7 dan 10 (2013)
2. Buku Teks Matematika kelas 7, 8, dan 10, 11 (2014)
3. Buku Teks Matematika kelas 7, 8, 9, dan 10, 11, 12 (2015)

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

1. Pengembangan Perangkat Pendampingan Guru Matematika SD dalam Implementasi Kurikulum 2013 (2014)
2. Peluang Kerjasama Unit Pendidikan Matematika Realistik Indonesia dengan Pemangku Kepentingan, LPPM Unesa (2013)
3. Pemanfaatan Internet untuk Pengembangan Profesi Guru-guru Matematika SMP RSBI/SBI Jawa Timur, 2010, (Stranas 2010)
4. Relevansi Pendidikan Matematika Realistik Indonesia (PMRI) dengan Kurikulum Tingkat Satuan Pendidikan (KTSP), 2009, (Stranas 2009)

Nama Lengkap : Dr. Muhammad Darwis M., M.Pd
Telp. Kantor/HP : (0411) 840 860
E-mail : darwismath2011@yahoo.com
Akun Facebook : Muhammad Darwis
Alamat Kantor : Kampus UNM Parang Tambung Jalan Dg. Tata Raya, Makassar.
Bidang Keahlian : Pendidikan Matematika

Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir

1. Dosen pada program S1, S2, dan S3 Universitas Negeri Makassar. (2007 - 2016)
2. Dosen di Pasca Sarja Universitas Cokroaminoto Palopo, Sulawesi Selatan. (2015 - 2016)
3. Pengembang Instrumen Penilaian BTP dan Penelaah Buku Matematika SMA/MA dan SMK. (2007 - 2016)
4. Instruktur pada Pelatihan Nasional Kurikulum 2013 (2014 - 2016)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar

1. S3 : Program Pasca Sarjana/Pendidikan Matematika/Universitas Negeri Surabaya (2000-2006)
2. S2 : Program Pasca Sarjana/Pendidikan Matematika/IKIP Malang (1989-1993)
3. S1 : FPMIPA/Matematika/Pendidikan Matematika/IKIP Ujung Pandang (1978-1982)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir)

1. Buku Teks Pelajaran Matematika SMA dan SMK.

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir)

1. Pengembangan Model Pembelajaran Matematika yang Melibatkan Kecerdasan Emosional Guru Dan Siswa (2006)
2. Analisis Kompetensi Guru Matematika di Kota Makassar (2010)

Nama Lengkap : Drs. Turmudi, ., M.Sc., Ph.D.
Telp. Kantor/HP : (0264)200395/ 081320140361
E-mail : turmudi@upi.edu
Akun Facebook : -
Alamat Kantor : Jl. Veteran 8 Purwakarta/Jl. Dr. Setiabudi 229 Bandung,
Bidang Keahlian : Pendidikan Matematika

Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir

1. Dosen Pendidikan Matematika di S1, S2, dan S3 Universitas Pendidikan Indonesia.
2. Ketua Jurusan Pendidikan Matematika (2007-2015)
3. Ketua Prodi S2 dan S3 Pendidikan Matematika SPs UPI (2012-2015) (dalam konteks terintegrasi dengan S1 Pendidikan Matematika FPMIPA UPI)
4. Direktur Kampus Daerah UPI Purwakarta (2015- sekarang)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar

1. S3 : Mathematics Education, Graduate School of Education, Educational Studies, La Trobe University Australia, Victoria Campus (1995-1997)
2. S2 : Educational and Training System Designs, Twente University Enschede, Th
3. S2 : Mathematics Education (Graduate School of Education), Educational Studies, La Trobe University Australia, Victoria Campus (1995-1997)
4. S1 : Fakultas Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Jurusan Pendidikan Matematika, IKIP Bandung (Universitas Pendidikan Indonesia), (1984-1986).
5. D3 : Fakultas Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Jurusan Pendidikan Matematika, IKIP Bandung (Universitas Pendidikan Indonesia), (1983-1984).
6. D2 : Fakultas Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Jurusan Pendidikan Matematika, IKIP Bandung (Universitas Pendidikan Indonesia), (1980-1982).

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir)

1. Designing Contextual Learning Strategies Mathematics for Junior Secondary School in Indonesia (2006)
2. Pengembangan Pemodelan Matematika di SMP dan SMA (2009)
3. Kajian Efektivitas Pelaksanaan Program DAK Bidang Pendidikan Tahun 2003 - 2008 (Sensus di Kota Manado, Kendari, dan Baros) (2009)
4. Peningkatan Kesadaran Bernovasi dalam Pembelajaran Matematika Guru SMP Melalui Lesson Study (2010)
5. Identifikasi Keberbakatan dalam Bidang Matematika untuk Siswa SMA (2011)
6. Pengembangan Desain Didaktis Subjek Spesifik Pedagang Bidang Matematika dalam Pendidikan Profesi Guru (2011)
7. Eksplorasi Etnomatematika Mayarakat Baduy dan Kampung Naga (2013)
8. Pengembangan Pembelajaran Matematika Berbasis Fenomena Didaktis (2014)
9. Pengembangan Literasi, Sains, dan Matematika di Sekolah Menengah Pertama (2014)
10. Pengembangan Pembelajaran Matematika Berbasis Fenomena Didaktis di Pendidikan Dasar (2015)

Nama Lengkap : Prof. Dr. H. Nanang Priatna, M.Pd
Telp. Kantor/HP : -
E-mail : nanang_priatna@yahoo.com.
Akun Facebook : -
Alamat Kantor : Departemen Pendidikan Matematika FPMIPA UPI, Jl. Dr. Setiabudhi No. 229 Bandung
Bidang Keahlian : Pembelajaran Matematika

Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir:

1. Bekerja sebagai Dosen Departemen Pendidikan Matematika UPI dan mengajar di Sekolah Pascasarjana UPI. (1988 - sekarang)
2. Mengajar di President University Cikarang-Bekasi (2013 - sekarang)
3. Mengajar di Universitas Widyatama Bandung (2012 - sekarang)
4. Sebagai konsultan manajemen pada Direktorat TK & SD Ditjen Dikdasmen Kemdikbud (2007-2010)
5. Sebagai konsultan manajemen pada Direktorat P2TK Pendidikan Dasar Ditjen Pendidikan Dasar Kemdiknas (2011)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S3 : Program Studi Pendidikan Matematika dari Universitas Pendidikan Indonesia (1998 - 2003)
2. S2 : Program Studi Pendidikan Matematika dari IKIP Malang (1990 - 1994)
3. S1 : Program Studi Pendidikan Matematika di IKIP Bandung (1982 - 1987)

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

1. Analisis Daya Serap Matematika Siswa SD Tingkat Nasional (Tahun 2008).
2. Capaian Hasil Ujian Akhir Sekolah Berstandar Nasional dan Pemetaan Mutu Pendidikan SD secara Nasional (Tahun 2008).
3. Kajian Pembelajaran Calistung (Membaca, Menulis, dan Berhitung) Kelas Awal di Sekolah Dasar Wilayah Indonesia Bagian Timur (Tahun 2009).
4. Analisis Daya Serap Matematika Siswa SD Tingkat Nasional (Tahun 2010).
5. Pembelajaran Matematika Interaktif untuk Meningkatkan Kemampuan Penalaran, Komunikasi, dan Pemecahan Masalah Matematis Tahap I (Tahun 2012).
6. Pembelajaran Matematika Interaktif untuk Meningkatkan Kemampuan Penalaran, Komunikasi, dan Pemecahan Masalah Matematis Tahap II (Tahun 2013).
7. Desain dan Pengembangan Pembelajaran Berbasis Masalah Berbantuan Komputer untuk Meningkatkan Kemampuan Pemecahan Masalah Matematis, Berpikir Kreatif, dan Disposisi Matematis Siswa SMP (Tahun 2013).
8. Desain dan Pengembangan Pembelajaran dengan Pendekatan Open-Ended Berbantuan Geogebra untuk Meningkatkan Spatial Ability, Berpikir Kritis, dan Self-Concept Siswa SMP (Tahun 2014).
9. Desain dan Pengembangan Model Brain-Based Learning untuk Meningkatkan Kemampuan Representasi Matematis, Berpikir Logis, dan Self-Efficacy Siswa SMP (Tahun 2015).
10. Penerapan Prinsip Brain-Based Learning Berbantuan Geogebra untuk Meningkatkan Spatial Ability, Kemampuan Abstraksi, dan Berpikir Kreatif Matematis Siswa SMP Tahap I (Tahun 2016).

Profil Editor

Nama Lengkap : Taryo, S.Si
Telp. Kantor/HP : 021-8717006/085691997883
E-mail : ayo_math@yahoo.com
Akun Facebook : Taryo Abdillah
Alamat Kantor : Jl. H. Baping Raya 100 Ciracas, Jakarta - 13740
Bidang Keahlian : Matematika

Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir:

1. 2005 – 2010 : Guru Bimbingan Belajar PT Bintang Pelajar
2. 2010 – Sekarang : Editor Buku Pelajaran PT Penerbit Erlangga Mahameru

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S1 : Fakultas MIPA Jurusan Matematika Uiversitas Negeri Jakarta (2002-2007)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

1. Buku Teks Matematika kelas 7 dan 10 (2013)
2. Buku Teks Matematika kelas 7, 8, dan 10, 11 (2014)
3. Buku Teks Matematika kelas 7, 8, 9, dan 10, 11, 12 (2015)

Judul Buku yang Pernah Diedit (10 Tahun Terakhir)

1. Mathematics Bilingual For Senior High School 1A-3B, 2010 – 2011
2. LPR (Lembar Pekerjaan Rumah) Matematika, 2010 – 2013
3. Smart Mathematics, 2011
4. Erlangga Fokus UN, 2011 – 2016
5. SPM (Seri Pendalaman Materi) Matematika, 2012 – 2015
6. Mandiri Matematika, 2013 – 2015
7. Matematika SMP/MTs, 2013 – 2016
8. Matematika SMA/MA, 2013 – 2016
9. Bupena (Buku Penilaian Autentik) Matematika, 2013 – 2016
10. Erlangga X-Press UN Matematika, 2015 – 2016

NARKOBA

membuat Anda lemah,
mereka membuat masa depan Anda

MUSNAH